Dal piano alla sfera: come si trasformano le sezioni coniche. Prodigi di PalpEll

Felice Ragazzo, Roma 12/2012

Sorprese tra piano e sfera.

Un risultato imprevisto che domina nel libro “Curve Policentriche – Sistemi di raccordo tra archi e rette” è che tra due cerchi di raggio differente sussista una coppia di coniche come luoghi di equidistanza[1]. È un risultato significativo poiché è funzionale alla tracciatura di archi raccordanti. La sua essenza è nella geometria del piano poiché serve a disegnare con rigore forme non rettilinee a carattere policentrico.

Prima ancora di pubblicare il libro, per pura curiosità, ho tracciato un cerchio e un punto su di una sfera, cercando di scoprire quali regole sarebbero rimaste immutate e quali no, nel caso di un cerchio tangente al primo e passante per il punto[2].

Percorso sperimentale di studio.

Non essendomi chiaro l’argomento, di primo acchito ho proceduto a tentoni[3]. Il risultato iniziale è stato una rosa di punti a caso sulla sfera determinati dagli incroci tra cerchi di raggio incrementale rispetto alle figure di partenza, quindi ho collegato ogni punto con una curva interpolata su superficie. In senso strettamente matematico non sarebbe stato un risultato rigoroso, ma certamente mi avrebbe un po’ illuminato. Infatti, dopo aver fatto un intero giro di cerchi intersecanti, intorno al cerchio e al punto dati, dopo aver interpolato i punti come detto, ecco apparire, non uno, ma due anelli! Secondo un determinato orientamento, tali anelli parevano ellissi, ma con altro orientamento i segni erano tipici dell’iperbole. Con altro orientamento ancora, l’immagine tornava ad essere quella di un’ellisse, ma di diversa forma rispetto alla precedente. (fig. 1)

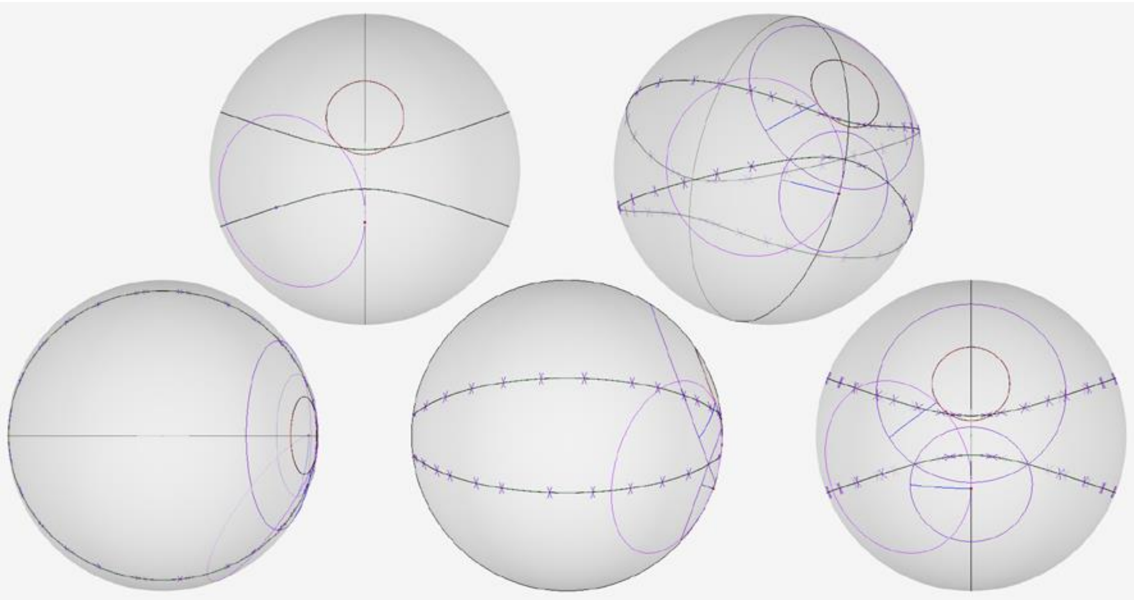

Fig. 1: Individuazione per tentativi del luogo di equidistanza tra un cerchio e un punto su superficie sferica, tale da poter disegnare una classe di cerchi tangenti al primo e passane per il secondo.

Nelle more di accertare che le figure apparenti fossero effettivamente ellissi ed iperbole, mi chiedevo dove potessi scovare la «conica» mancante, la «parabola». Poiché in “Curve

Policentriche" i luoghi di equidistanza tra retta e cerchio (qui punto) sono parabole, ho fatto subito un tentativo di sostituire il generico cerchio con un meridiano, sulla base dell'assunto che su sfera questi sono «rette». Risultato fallito! La coppia di anelli era inspiegabilmente simile alla precedente. Perché? Ecco un nuovo focus di ricerca. Nell'effettuazione dei vari tentativi di indagine, emergeva poi una correlazione tra le due proiezioni che denotavano l'ellisse. La differenza consisteva nel fatto che, in un caso, l'ellisse appariva intera e interna al profilo della sfera, nell'altro appariva parziale per mezzo di due archi simmetrici, quindi esorbitante il profilo sferico. Come pervenire all'ellisse intera, a partire dalla coppia di archi simmetrici, è di facile soluzione, come si evincerà più avanti (vedi fig. 9). Pervengo finalmente a scovare la «parabola» dopo aver verificato che, sia per l'«ellisse», sia per l'«iperbole», deformate su superficie sferica, valevano sperimentalmente le principali proprietà di queste figure nel piano. Per l'«ellisse» rimaneva valida l'equivalenza delle somme delle geodetiche di un punto rispetto ai «fuochi», mentre per l'«iperbole» rimaneva valida la differenza. Ora, per risolvere la questione sarebbe occorso individuare le analogie con il piano, ovvero una situazione in cui la distanza di un punto dal «fuoco» sarebbe stata equivalente a quella da una «direttrice». Ma ciò è proprio quanto si è visto all'inizio con la rosa di punti casuali, ciascuno equidistante, sia dal cerchio, sia dal punto dati, beninteso in termini di geodetiche! La cosa singolare è che, per quanto riguarda la «direttrice», non sussiste l'analogia meridiano-retta, essendo il cerchio di raggio qualsiasi. Chiarito tutto ciò, l'immaginazione trova spazio per fare un salto di qualità. Si viene a chiarire anche il significato di «fuoco», il quale, come in "Curve Policentriche", costituisce il centro di uno dei cerchi da raccordare. L'approdo finale è che la figura individuata con il procedimento descritto all'inizio risulta essere espressiva di tutte e tre le proprietà delle coniche e, pertanto, può essere considerata simultaneamente sia l'una, sia l'altra, sia l'altra ancora! (fig. 2)

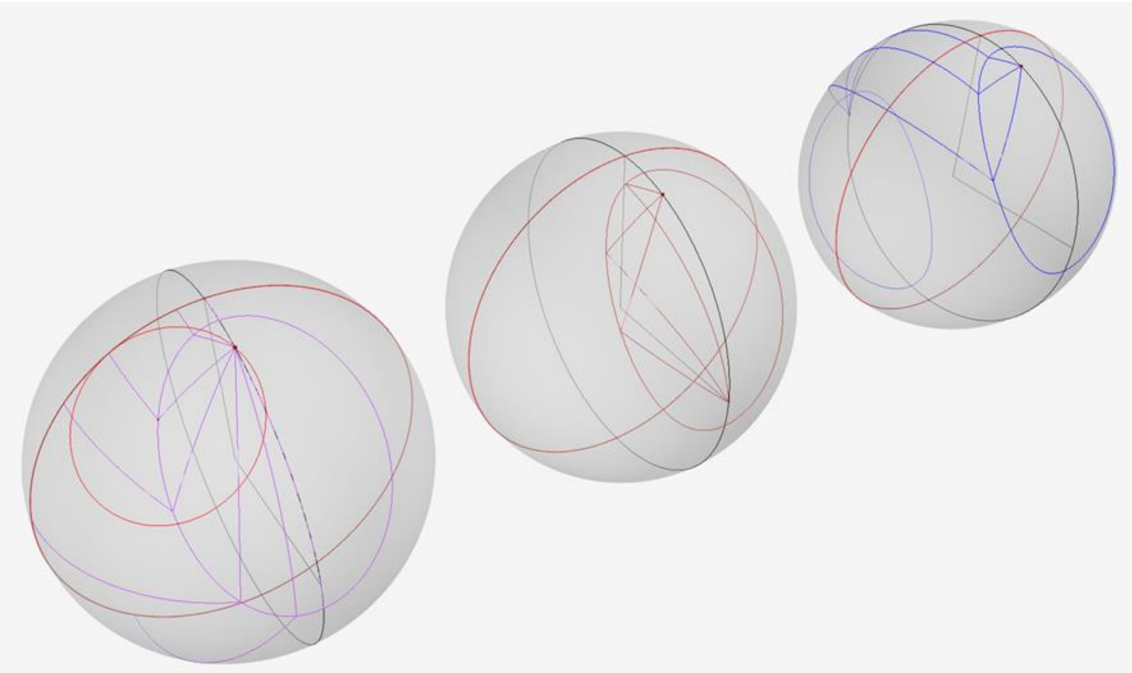

Fig. 2: Il luogo di equidistanza trovato appare come un ellisse, ma possiede le principali proprietà di ciascuna delle tre sezioni coniche. È da osservare il fatto che sia la «parabola» (a sinistra), sia l'«iperbole» (a destra), su sfera sono curve chiuse.

Insomma, su sfera le tre coniche si concentrano in una! Ecco perché ha preso avvio una fase di studio volta a chiarire quanti più aspetti possibili e ad effettuare ogni opportuna verifica. Inoltre, è emersa anche la necessità di dare un nome a questa nuova figura. Il nome di PaIpEll consiste in un acronimo che raggruppa le lettere iniziali di ciascuna conica, ossia Parabola, Iperbole, Ellisse.

Poiché lo studio ha avuto un'impronta sperimentale, fondata sulle tecniche di modellazione virtuale computerizzata, e poiché ciò implica il concetto di tolleranza, seppure accurata, ma pur sempre imperfetta, si sono resi necessari alcuni chiarimenti logici. Al tempo stesso, lo studio ha contemplato una riproposizione in chiave sferica delle più significative situazioni di raccordo: cerchio-cerchio, cerchio-punto, quando «interni» e quando «esterni», tenendo presente che, su sfera, trattasi di definizioni per lo più prive di senso; oltre ad incontrare altre difformità e paradossi.

Alcuni chiarimenti logici.

Il primo chiarimento ha riguardato la corrispondenza tra figura conica nel piano e figura conica sulla sfera. Se si proietta un'ellisse di asse maggiore più corto del diametro della sfera e centrato in essa, si ottiene un luogo di punti dotato delle caratteristiche di PaIpEll. La stessa cosa succede se l'asse maggiore dell'ellisse supera il diametro della sfera (ovviamente non quello minore). Ancora la stessa cosa succede se si proietta un'iperbole. Ciò vale anche per la parabola, ma in questo caso i raggi proiettanti, anziché essere paralleli, debbono convergere verso il centro della sfera. Una sintesi rappresentativa di tali processi è stata sviluppata in un'unica immagine, mediante la quale si evince che il gioco delle simmetrie porta a considerare quattro coni parabolici. (fig. 3)

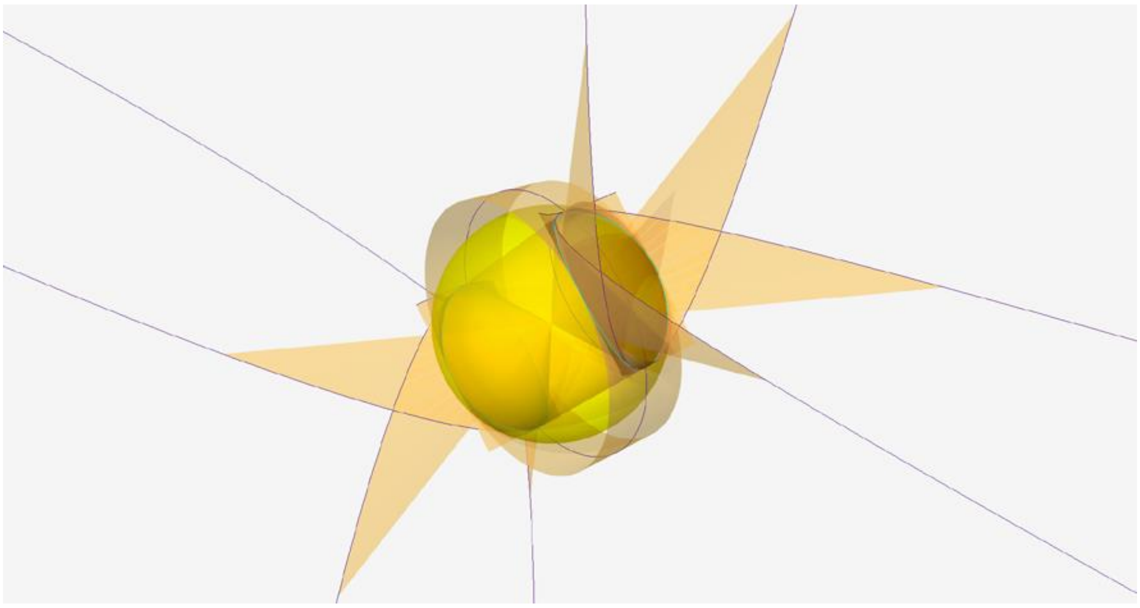

Fig. 3: Intersezione con una sfera dei cilindri ellittici e iperbolico, oltre che del cono parabolico, fungenti da generatori di PaIpEll.

Un secondo chiarimento logico ha riguardato il fatto che le figure ottenute con i quattro tipi di proiezione fossero correlate tra di loro. Il criterio di accertamento seguito è stato quello di pervenire alla determinazione di una data conica nel piano, a partire da un PaIpEll frutto della proiezione di un'altra. Per esempio, data un'ellisse, trovare il corrispondente PaIpEll e poi da questo risalire alla corrispondente iperbole e così via. Esperite tutte le possibili interpolazioni, il quadro sarebbe stato completo. A questo punto si sono aperte due strade: una incentrata sulla possibilità di ricostruire la conica, secondo criteri basati sulle proprietà matematiche, così come sono conosciute nei manuali correnti; l'altra incentrata, invece, su presupposti direttamente legati al rapporto PaIpEll-sfera. Ciò merita un breve approfondimento, poiché mette in causa le relazioni topologiche tra superficie sferica e spazio euclideo. Infatti, fin quando il percorso dimostrativo si basa su proprietà matematiche convenzionali, si opera in una logica euclidea; non a caso, linee, punti, cerchi e così via … talvolta, "fuoriescono" dalla superficie sferica; invece, quando i dati geometrico-matematici appartengono al solo spazio sferico, non "fuoriescono" da esso.

Un terzo chiarimento logico (che in effetti è un corollario del primo) ha riguardato la coerenza tra le proprietà fondamentali delle coniche nel piano e su PaIpEll.

Approfondimenti e dimostrazioni.

In chiave geometrica, cercherò ora di sviscerare il più possibile questi aspetti, a partire dalle dimostrazioni, in merito alle quali, proiettando un PaIpEll, le figure via via ottenute siano sezioni coniche. (figg. 4-5-6)

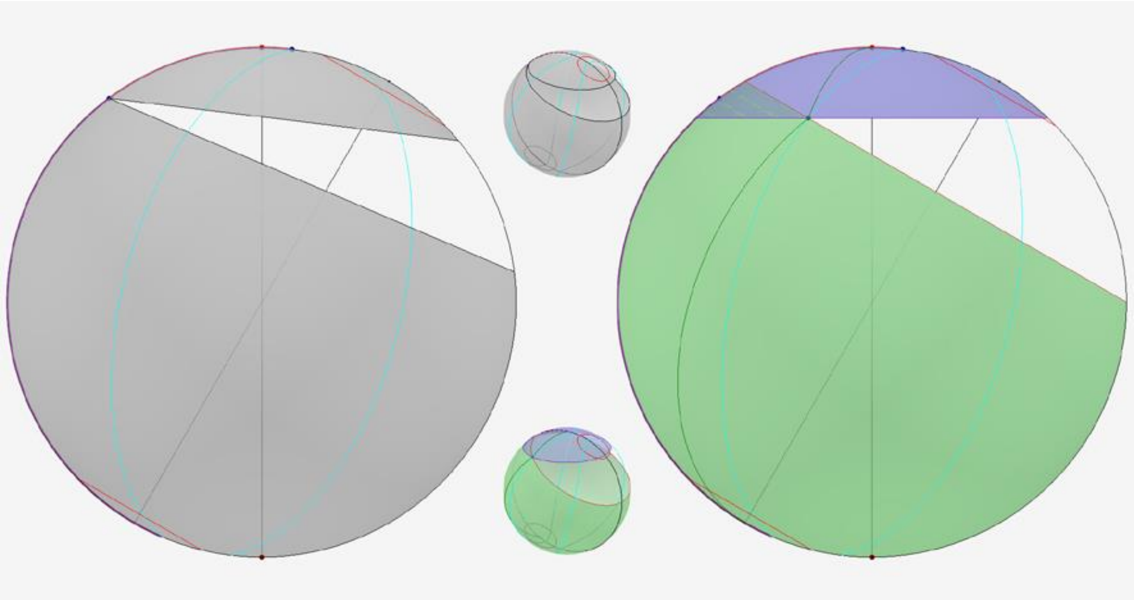

Fig. 4: Dimostrazione grafica che anche su sfera vale la proprietà dell'ellisse consistente nella somma costante delle distanze di un punto dai fuochi. Se l'arco maggiore di PaIpEll viene suddiviso in due archi parziali e con questi si costruiscono due calotte come mostrato in figura e se poi i poli di queste vengono fatti coincidere con il centro del cerchio e con il punto, le loro intersezioni non possono che situarsi a distanze dai «fuochi», la cui somma è costante.

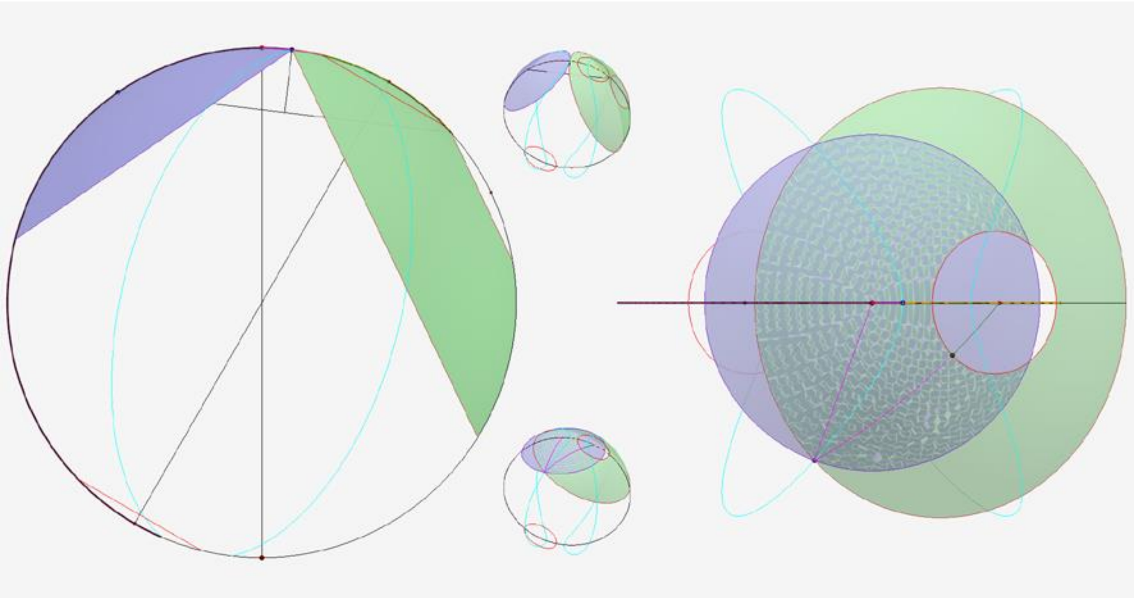

Fig. 5: Dimostrazione grafica che anche su sfera vale la proprietà dell'iperbole consistente nella differenza costante delle distanze di un punto dai fuochi. Se sull'arco maggiore di PaIpEll si stacca un punto secondo le modalità indicate in figura e con l'arco che se ne ricava si costruisce una calotta e poi con lo stesso arco sommato al raggio del cerchio se ne costruisce un'altra bucata (secondo il diametro del cerchio) quando i centri delle calotte sono portate a coincidere con il centro di cerchio e punto, le intersezione tra gli orli non possono che identificare uguali distanze su geodetiche di lunghezza differente. Il raggio del cerchio rappresenta la differenza costante.

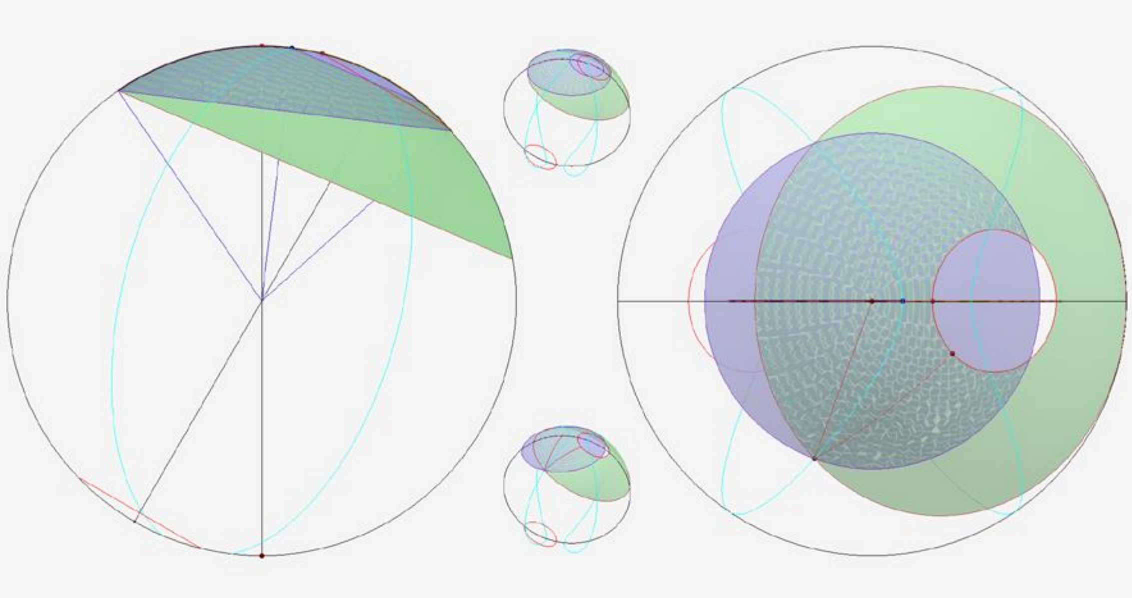

Fig. 6: Dimostrazione grafica che anche su sfera vale la proprietà della parabola consistente nell'uguaglianza della distanza di un punto da fuoco e direttrice. Se sull'arco maggiore di PaIpEll si stacca un punto secondo le modalità indicate in figura e con l'arco che se ne ricava si costruisce una calotta e poi con lo stesso arco sommato al raggio del cerchio se ne costruisce un'altra bucata (secondo il diametro del cerchio) quando i centri delle calotte sono portate a coincidere con il centro di cerchio e punto, le intersezione tra gli orli non possono che identificare uguali distanze. In questo caso, il cerchio funge da direttrice, e singolarmente non vale l'analogia meridiano-retta tra superficie sferica e piano.

Partiamo dall'ellisse interna. Dopo aver proiettato PaIpEll su di un piano passante per i quadranti di arco maggiore[4] e normale al piano relativo al meridiano principale[5], si suppone che si ottenga un ellisse e che questa sia strettamente relazionata alla figura proiettata. Per dimostrare che sia effettivamente così, occorre accertare se effettivamente, come appare dal disegno, i fuochi dell'ellisse si trovino sui raggi sferici relativi ai «fuochi» di PaIpEll. La dimostrazione di ciò si ottiene tramite due passaggi. Per il primo, basta ruotare il raggio sferico secondo un asse normale ad esso e passante per il centro della sfera: il cerchio che ne deriva intersecherà in due punti quello podale dell'ellisse (entrambi sono frutto di sezioni sferiche). Il segmento che collega detti punti non può che intersecare il raggio sferico. Viene ora il secondo passaggio: il segmento di cui appena sopra taglia l'asse maggiore proprio nella posizione di uno dei fuochi. Ecco allora dimostrato che i «fuochi» di PaIpEll sono in stretta corrispondenza con quelli dell'ellisse interna. (fig. 7)

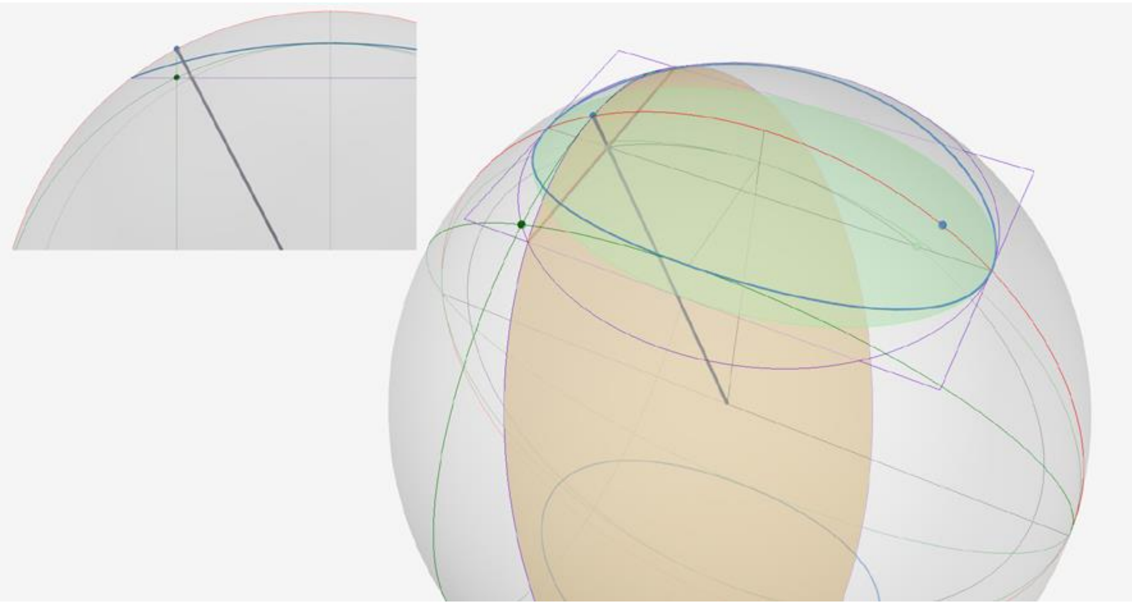

Fig. 7: Grafici relativi alla dimostrazione che sia il «fuoco» di PaIpEll, sia quello della sottostante ellisse interna stanno su un raggio sferico.

Esaminiamo ora l'iperbole. Supponiamo che l'intersezione tra il prolungamento del raggio sferico, passante per un «fuoco» di PaIpEll e la retta che passa per i quadranti di arco maggiore (dalla stessa parte) dei due anelli di PaIpEll medesimo, sia il fuoco di uno dei rami dell'iperbole. Anche in questo caso si può dimostrare che sia effettivamente così con due passaggi geometrici. Il primo (analogo a quello dell'ellisse) consiste nel dimostrare che i due fuochi appartengono alla stessa retta, come appare dal disegno. Ma per fare ciò, occorre considerare una sfera maggiorata di quanto si allunga il raggio primitivo. Quindi, anche qui, se si fa ruotare il raggio prolungato (con lo stesso asse indicato per l'ellisse) si traccia un cerchio che necessariamente intersecherà il cilindro estruso dal meridiano principale. Il segmento che collega i due punti ottenuti non può che tagliare il raggio prolungato e lo taglia in corrispondenza di un quadrante di arco maggiore, quindi all'estremità del raggio quando non prolungato. Per il secondo passaggio occorre mettere in causa il concetto di eccentricità, individuando la direttrice dell'iperbole. Questa operazione è nota e possono fare fede i disegni elaborati (segno verde). Dai disegni si evince come il punto di intersezione tra direttrice e podale, se allineato col centro di questa, permetta di identificare un asintoto, il quale, se ruotato di 90 gradi nel punto trovato, interseca l'asse dell'iperbole in uno dei suoi fuochi. Ma si potrà avere conferma che il fuoco trovato appartenga all'iperbole ipotizzata, se si farà ruotare (sul piano su cui giace l'iperbole) il punto di intersezione tra asintoto e parallela alla direttrice passante per il relativo vertice. La certezza di ciò è data dal fatto che, come risulta ben chiaro dai disegni (vedi intersezioni del meridiano principale spostato), il cerchio su cui ruota il punto di cui sopra appartiene alla sfera maggiorata; punto che determina i due parametri "a" e "b" dell'iperbole. (fig. 8)

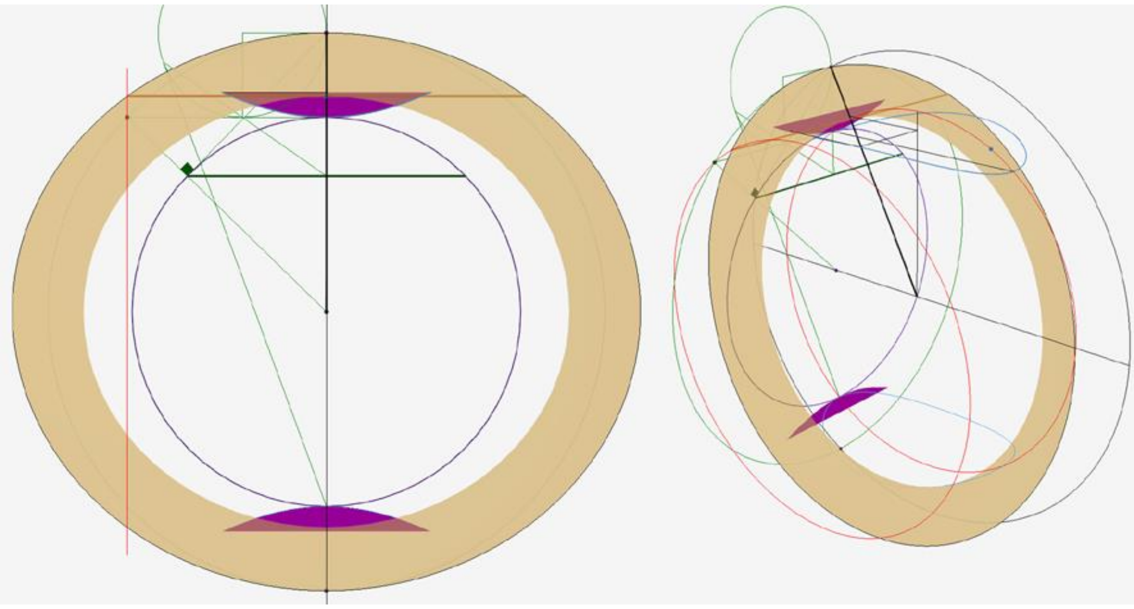

Fig. 8: Grafici relativi alla dimostrazione che sia il «fuoco» di PaIpEll, sia quello di un ramo dell'iperbole sono allineati secondo un raggio sferico.

Ora l'ellisse esterna. Qui lo scenario cambia, poiché con l'intersezione proiettata su di un piano si ottengono soltanto due archi di ellisse. I due archi sono simmetrici rispetto all'asse maggiore, pertanto il primo problema consiste nell'identificare l'intera ellisse. Ma, come si vedrà, è proprio nel processo di identificazione dell'ellisse intera che si troverà la sua coerenza con PaIpEll e le altre coniche. L'artificio per determinare l'ellisse intera può essere quello di considerarla come frutto di una sezione opportunamente sghemba di un cilindro avente diametro pari all'asse minore, misura che si ha poiché sono noti i quadranti sull'asse minore (punti mediani degli archi). L'inclinazione del piano di sezione del cilindro, rispetto all'asse di questo, si determina nel seguente modo. Prima si traccia una retta normale al segmento che collega i due quadranti di arco maggiore di PaIpEll, passante per un punto di intersezione di detto segmento con il cilindro; quindi si individua il punto di intersezione tra tale retta e l'arco avente raggio pari alla metà del segmento collegante i due quadranti di PaIpEll e incentrato nella mediana di esso. Considerando questo punto e il centro dell'arco (mediana del segmento), si determina il giusto allineamento per sezionare il cilindro. È singolare che il punto proiettato all'inizio sia il fuoco dell'ellisse interna, come si evince con chiarezza dai disegni. (fig. 9) Ora, tornando a considerare la sfera maggiorata di cui all'iperbole, si può dare conto del fatto che il semiasse maggiore dell'ellisse esterna coincida con la distanza del fuoco dell'iperbole dal centro della sfera. Ciò, oltre ad apparire chiaro dai disegni, per via delle intersezioni tra il cilindro e opportuni meridiani della sfera maggiorata, lo si evince, tra molti altri aspetti illustrati, anche grazie alla messa in piano delle relazioni geometriche interessate. (fig. 10)

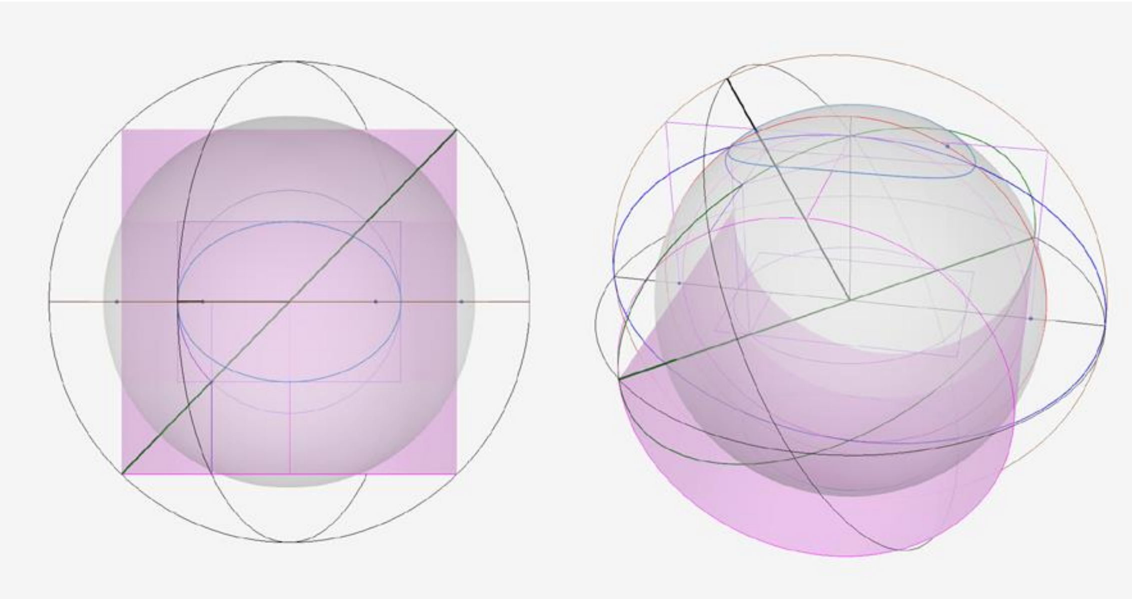

Fig. 9: Grafici relativi alla dimostrazione della relazione tra il «fuoco» di PaIpEll e l'ellisse esterna, dove peraltro risulta che il semiasse maggiore ha lunghezza pari alla distanza tra un fuoco dell'iperbole e il centro della sfera.

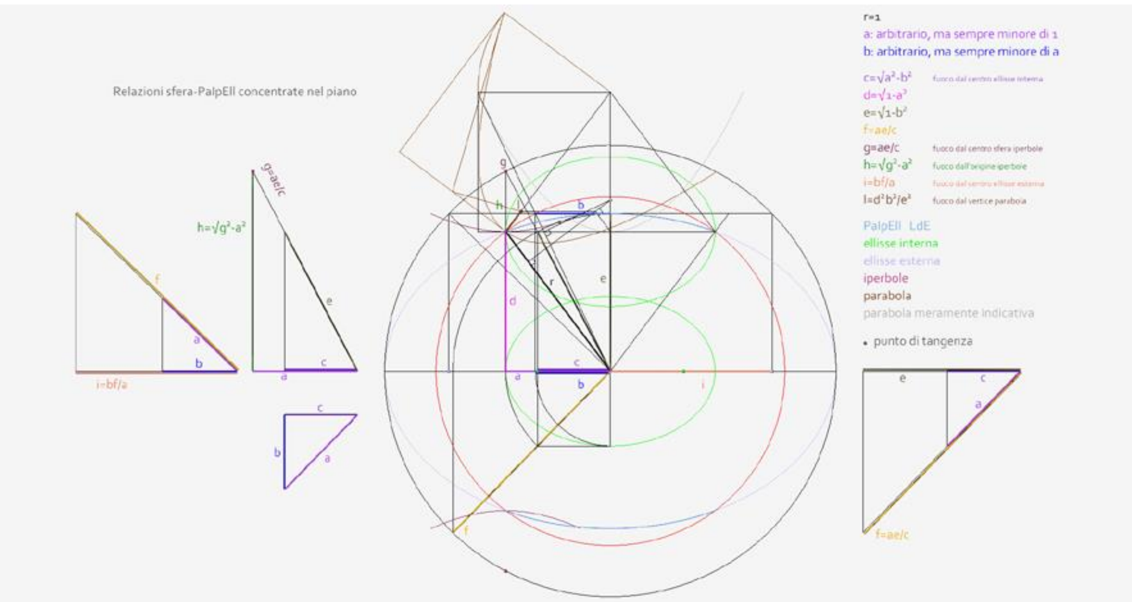

Fig. 10: Tavola riassuntiva delle relazioni che intercorrono tra PaIpEll e le coniche generatrici, compresse in unico piano.

Siamo arrivati, con la parabola, all'ultima dimostrazione. Qui lo scenario cambia ancora più radicalmente. Ciò è dovuto al fatto che, a differenza delle altre coniche, per determinare PaIpEll serve una proiezione a raggi convergenti nel centro della sfera. Il piano su cui giace la parabola è parallelo alla congiungente di due quadranti diametralmente opposti di PaIpEll e il suo vertice coincide con uno dei quadranti di arco maggiore di questo. (fig. 11) Al fine di pervenire alla parabola a partire da un determinato PaIpEll, occorre individuare uno dei raggi del cono parabolico e da esso sviluppare le operazioni dovute. Ciò è possibile ed è facilitato se il raggio passa per un quadrante di arco minore. La proprietà della parabola, che permette di determinarne l'eccentricità per mezzo dell'individuazione di fuoco e direttrice, si può illustrare con la seguente operazione. Stabilito l'asse, il vertice, un punto dato[6], si porti la normale all'asse, di lunghezza pari alla distanza del punto dall'asse medesimo, passante per il vertice. Si colleghi il punto dato con la mediana di detta normale. Ruotando ora di 90 gradi il segmento ottenuto (facendo riferimento al piano formato da asse e normale), il punto di intersezione che si determina con l'asse della parabola ne è il suo fuoco, mentre il punto di intersezione con la parallela all'asse passante per il punto dato determina la posizione della direttrice. Nei disegni sono stati inoltre evidenziati i passaggi per mezzo dei quali, mediante opportuni ribaltamenti, è stato possibile sviluppare una sintesi planare (fig. 11).

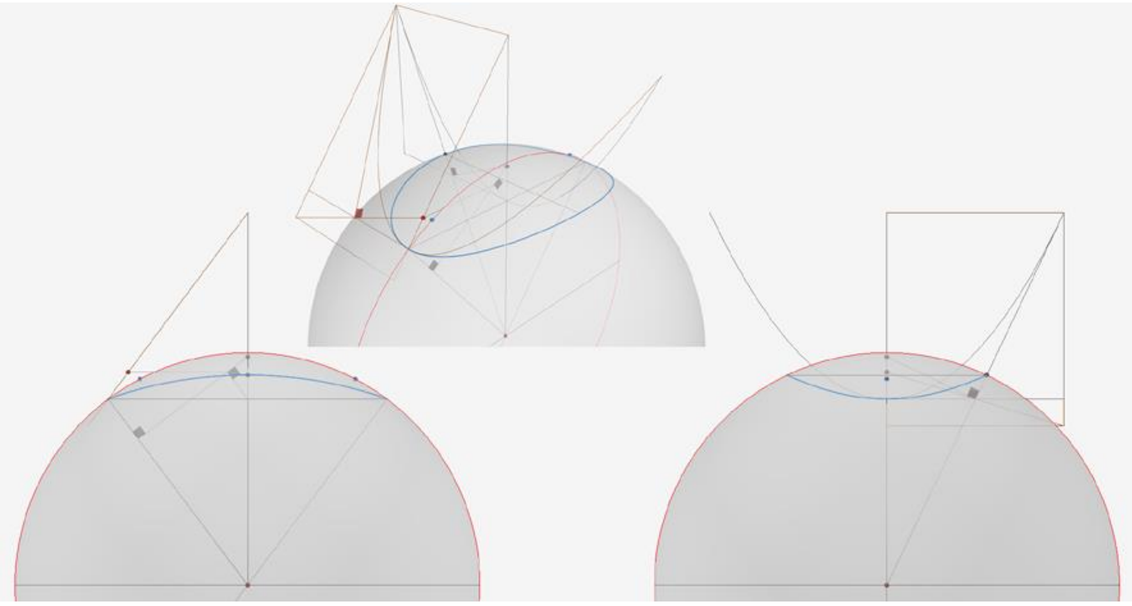

Fig. 11: Grafici relativi alla dimostrazione delle modalità di individuazione del fuoco della parabola generatrice.

Conclusioni.

Quanto qui illustrato offre una visione soltanto parziale di ciò che è emerso nel corso dello studio. Il metodo adottato è quello di «riga», «compasso» e computer, fondato su tecniche di modellazione virtuale computerizzata. Ciò favorisce un approccio che esalta il senso della scoperta, così come quando si delinea una forma per una funzione. Ecco perché il recupero della letteratura specialistica è avvenuto in un secondo tempo. Tale letteratura specialistica, che inizia a concretizzarsi a cavallo tra il XVIII e il XIX secolo, è stata prodotta da eminenti studiosi tra i quali vale la pena di ricordare William R. Hamilton e Luigi Cremona. Da questi, oltre che da autori più recenti, c'è molto da ricavare, ma in questa circostanza, preme mettere in evidenza come il recupero di PaIpEll aiuti a coltivare una disciplina utile ad un linguaggio progettuale al di fuori degli schemi consolidati.

Note:

1. Il libro “Curve Policentriche” è stato pubblicato da Prospettive Edizioni nel 2011;
2. Il punto è considerabile un cerchio di raggio nullo e, per tale motivo, offre qualche semplificazione.
3. Il tema è già presente in letteratura specialistica, sebbene ad esclusione di molteplici aspetti peculiari qui trattati, tra cui i modi espositivi. Ecco perché ho scelto questo spirito narrativo.
4. *Quadrante di arco maggiore o minore*: il corrispondente su PaIpEll del quadrante di un ellisse o di un cerchio;
5. *Meridiano principale*: il cui piano divide simmetricamente PaIpEll in senso longitudinale, segno rosso;
6. Un punto sul raggio, passante per un quadrante di arco minore, allineato con l’intersezione dell’asse parabolico con il raggio sferico passante per la mediana del segmento che collega i due quadranti di arco maggiore; (fig. 11)

Bibliografia

Ragazzo, Felice, 2011. *Curve Policentriche – Sistemi di raccordo tra archi e rette*. Roma: Prospettive Edizioni, 2011, 288 p. ISBN: 978-88-89400-67-8.

Ragazzo, Felice, 1995. Geometria delle figure ovoidali. *Disegnare. Idee immagini*, 1995, 11, pp. 17-24.

Ragazzo, Felice, 2002. Un reticolo di quadrati per il profilo ovoidale del Colosseo. *Disegnare. Idee immagini*, 2002, 25, pp. 40-47.

Ragazzo, Felice, 2007. Teorema del Collare. *Tra geometria, design, industria*. http://matematica-old.unibocconi.it/interventi/ragazzo/design_home.htm.

Ragazzo, Felice, 2012. Dal piano alla sfera: come si trasformano le sezioni coniche. Prodigi e meraviglie di PaIpEll. http://www.feliceragazzo.it/archivio/ultime-notizie.

Berger, Marcel; 2009. *Géométrie II*. Verlag Berlin Heidelberg: Springer, 2009.

Borgnet, A, 1847. Analitique de la sphère. Tours: *Essai de Géom*, 1847.

Botto, Costantino, *Sopra una superficie d'area minima collegata ad un fascio di particolari coniche sferiche*. - Napoli : [s.n.!, [1936?!. - 1 v. (Estratto)

Chasles, Michel, 1841. *Two geometrical memoirs on the general properties of cones of the second degree, and on the spherical conics*. Dublin: Universitt Press, 1841

Darboux, Jean, Gaston, 1873. *Mémoire sur une classe remarquable de courbes ed de surfaces algébriques*. Paris: 1873.

Di Cocco, Capodaglio, Rita, De Cecco, Giuseppe, 1996. Curiosità sulle coniche sferiche. Roma: *Periodico di Matematiche, Serie VII, Volume 3, numero 4*, 1996.

Dirnböck, Hans, 1999. *Absolute polarity on the sphere; conics; loxodrome, tractrix*. Mathematical Communications 4(1999), 225–240. Mathematical Colloquium in Osijek, Croatian Mathematical Society - Division Osijek, April 23, 1999.

Fuss, Nicolaus, 1788. *De Proprietatibus quibusdam ellipseos in superficie sphaerica descriptae*. San Pietroburgo: Acta Acad Petrop, T. III, 1788.

Graves, Charles, 1889. *The Focal Circles of Spherical Conics*. Academy, 1889

Hamilton, William, Rowan, 1847. *A Theorem on Spherical Quadrilaterals and Spherical Conics*. Royal Irish Accademy (1847), p. 109.

Krause, Eugene, F., 1973. *Taxicab geometry*. Math. Teacher, Dec. 1973. 695-706.

Laatsch, Richard, 1982. *Piramidal sections in taxicab geometry*. Math. Mag., Sep. 1982. 205-512.

Loria, Gino, 1925. *Curve sghembe speciali*. Bologna: Zanichelli, Vol. I, II, 1925.

Maeda, Yoichi, 2005. *Spherical Conic and the Fourth Parameter*. KMITL Sci. J. Vol.5 No.1 Feb. 2005 (pp.165-171)

Maeda,Yoichi, sd. How to Project Spherical Conics into the Plane, Department of Mathematics Tokai University Japan

Pursell, Lyle, E., 1960. Conics on a sphere. *The American Mathematical Monthly, Vol. 67, No. 9 (Nov., 1960), pp. 895-897*

Smith, Sykes, Gerrit, 1878. *Spherical conics. The Thesis of a candidate for Mathematical Honors conferred with the Degree of a A. B., at Harvard College, at commencement, 1877*. American Accademy of Arts and Sciences. ISSN: 01999818.

Tortolini, Barnaba, (Memoria di), 1849. Applicazioni dei trascendenti ellittici alla quadratura di alcune curve sferiche. Roma: *Annali di Scienze Matematiche e Fisiche*, 1850.

Veronese, Giuseppe, 1903. *Commemorazione del Socio Luigi Cremona*. Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei, (5), 12, 1903, pp. 664-678.

Vultaggio, Mario, sd. *La navigazione iperbolica*. navigaz.uniparthenope.it/sez_nav/...vol2/volume_2_cap_6.pdf

Whitehead, Hearn, George, 1846. *Researches on curves of the second order: also on cones and spherical conics treated analytically, in which the tangencies of Apollonius are investigated, and general geometrical constructions deduced from analysis; also several of the geometrical conclusions of M. Chasles are analytically*. London: G. Bell, 1846.

Zheng, Xiaoyu; Ennis, Roland; Richards, P., Gregory; Paloy-Muhoray, Peter, 2011. *A Plane Sweep Algorithm for the Voronoi Tessellation of the Sphere*. electronic-Liquid Crystal Communications 2011-12-13

http://en.wikipedia.org/wiki/Talk%3AAlgebraic_geometry