Problemi di geometria sferica

Roma, febbraio 2012

Dal piano alla sfera: come si trasformano le sezioni coniche.

Prodigi e meraviglie di PalpEll.

Felice Ragazzo

www.feliceragazzo.it

Anteprima.

Questo studio è un work in progress e trae origine dalla voglia di sapere che cosa succede se le sezioni coniche passano dal piano alla sfera.

Poiché nel libro «Curve Policentriche» ho acquisito che le coniche siano luoghi di equidistanza tra cerchi di differente raggio, mi è sorta la domanda se la cosa accadesse invariata sulla sfera.

Ho cominciato a modellare figure nello spazio 3D e sono giunto al presente risultato affermativo.

La rigorosità del metodo l'ho perseguita in primo luogo sul terreno logico, in secondo luogo prestando molta cura alle modellazioni virtuali, le quali, entro i limiti delle tolleranze della strumentazione digitale, hanno svolto la funzione di supporto di verifica.

Più che i testi scritti (assai scarni) parlano le figure, soprattutto per mezzo delle loro sequenze. Lessici matematici e sintesi formali non sono ignorati, ma rimandati ad altra occasione.

Poiché sussistono sì analogie, ma anche differenze, tra l'operare sul piano o sulla sfera, e poiché le coniche nel passaggio dall'una all'altra geometria mutano da tre distinti luoghi di punti ad uno e, in senso stretto, non sono più «sezioni coniche», ho pensato di fare chiarezza contraendo le tre parole di Parabola, Iperbole ed Ellisse nell'acronimo di «PaIpEll». Seppure l'intero studio si muova, per ora, in chiave di congettura, tuttavia tale luogo di punti è dimostrato con rigore.

L'occasione mi ha permesso, come progettista e come designer, di svincolarmi per un po' dalle catene di una geometria elementare e proiettiva stereotipate fondate sullo spazio 3D, cosa che non favorisce lo stimolo a salire nella graduatoria delle dimensioni spaziali.

Indice:

Per comodità, le due specificazioni di «interni» ed «esterni», prive di significato nella geometria sferica, in alcuni casi sono mantenute, ma con l'indicazione limitante dell'emisfero in cui i cerchi raccordandi giacciono.

Programma di studio.

Collegati al presente Power Point, ve ne sono altri diciotto finalizzati ad illustrare, con caratteristiche di serialità, le modalità di individuazione degli specifici PaIpEll a seconda della configurazione dei cerchi da raccordare.

L'indice di tali allegati è il seguente:

- Cerchi massimi, A;
- Cerchi massimi, B;
- Cerchio massimo – Cerchio asecante, A;
- Cerchio massimo – Cerchio asecante, B;
- Cerchio massimo – Cerchio secante, A;
- Cerchio massimo – Cerchio secante, B;
- Cerchio massimo – Cerchio tangente;
- Cerchio massimo – punto;
- Cerchio – Cerchio asecanti esterni, A (nell'emisfero);
- Cerchio – Cerchio asecanti esterni, B (nell'emisfero);
- Cerchio – Cerchio asecanti interni, A (nell'emisfero);
- Cerchio – Cerchio asecanti interni, B (nell'emisfero);
- Cerchio – Cerchio secanti , A;
- Cerchio – Cerchio secanti , B;
- Cerchio – Cerchio tangenti , A;
- Cerchio – Cerchio tangenti , B;
- Cerchio – Punto esterno (nell'emisfero);
- Cerchio – Punto interno (nell'emisfero)

01. Intersezioni tra sfera e superfici rigate:

PaIpEll seppure possieda alcune proprietà delle sezioni coniche, non può essere interamente assimilato ad esse per il fatto che a generarlo non contribuiscono un cono retto (a base circolare) e un piano intersecanti, ma bensì le quattro intersezioni che indipendentemente si possono stabilire tra una sfera ed una terna di cilindri (due ellittici, uno iperbolico) ed un cono a base parabolica. Le figure sezionanti appartengono alla categoria delle superfici rigate.

Per orizzontarmi meglio nel condurre il presente studio ho tenuto fermi i seguenti punti:

- la sfera diventa il corrispettivo del piano;
- le quattro superfici rigate diventano il corrispettivo del cono.

Per fornire una visione ordinata circa la complessa configurazione geometrica generale, oltretutto resa più ardua dai continui passaggi comparativi tra geometria del piano e della sfera, sono stabilite una serie di regole:

- nella sfera le sezioni coniche diventano «PaIpEll»;
- nella sfera gli assi di PaIpEll diventano archi o semi-archi;
- gli assi delle figure sezionanti passano sempre per il centro della sfera;
- una più complessa configurazione simmetrica riguarda la figura sezionante derivante dalla parabola, visto che per essa non si tratta di un cilindro, ma di un cono;
- si considera principale il meridiano che passa per i centri dei cerchi raccordandi e per i punti intersecandi.

Combinazioni:

- sfera e cilindro ellittico - ellisse (interna);
- sfera e cilindro ellittico - ellisse (esterna);
- sfera e cilindro iperbolico - iperbole;
- sfera e cono parabolico - parabola.

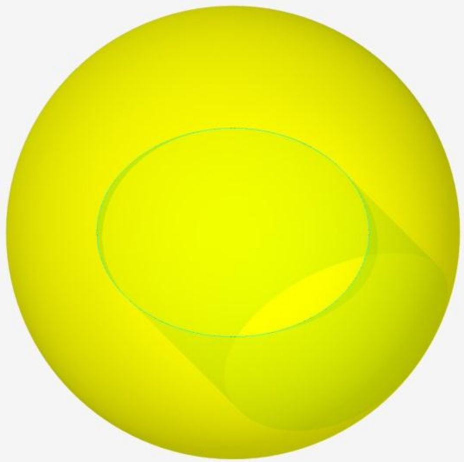
01a. Intersezione tra sfera e cilindro ellittico; modalità:

- asse maggiore dell'ellisse nel piano più piccolo del diametro della sfera;
- risultato: PaIpEll in due anelli.

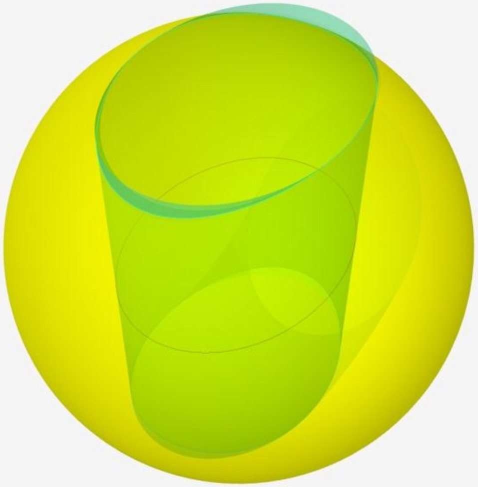
PaIpEll-ellisse (interna), caratteristiche:

- proiezione 1, appare come un ellisse intero;
- proiezione 2, appare con due archi simmetrici di ellisse;
- proiezione 3, appare con due rami di iperbole.

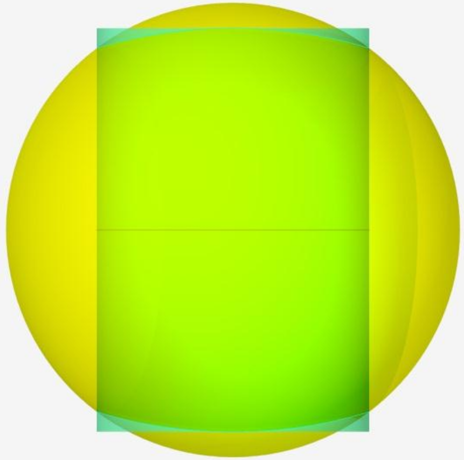
Come si vedrà in seguito, esiste anche una proiezione che darà luogo ad una parabola.



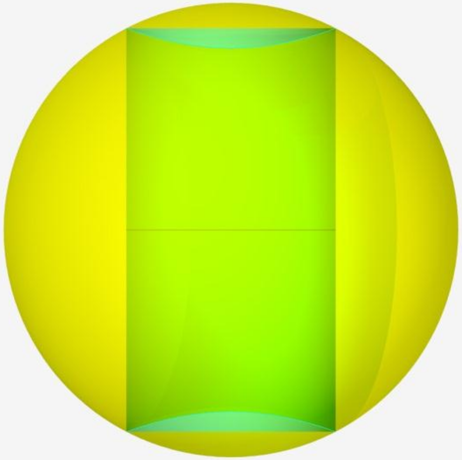
1.



4.



2.



3.

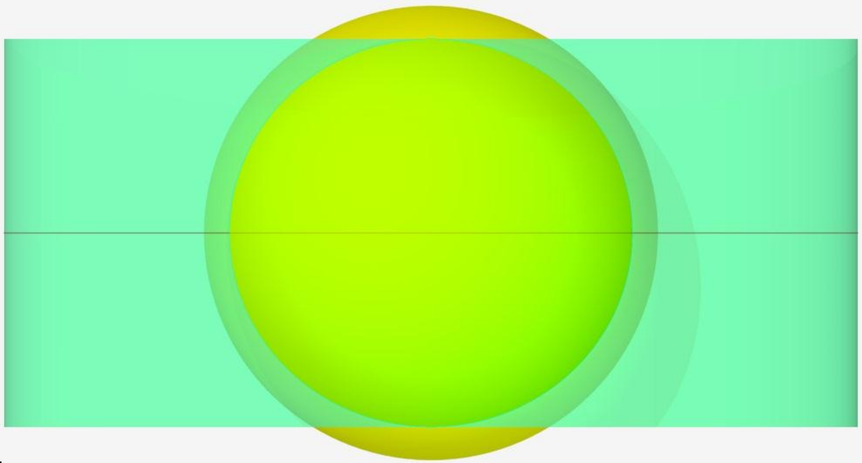
01b. Intersezione tra sfera e cilindro ellittico; modalità:

- asse maggiore dell’ellisse nel piano più grande del diametro della sfera;
- risultato: PaIpEll in due anelli.

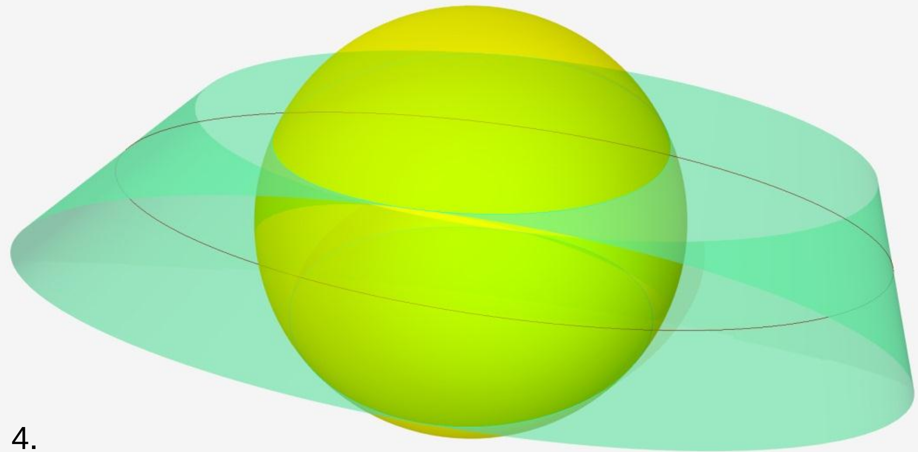
PaIpEll-ellisse (esterna), caratteristiche:

- proiezione 1, appare come un ellisse intero;
- proiezione 2, appare con due archi simmetrici di ellisse;
- proiezione 3, appare con due rami di iperbole.

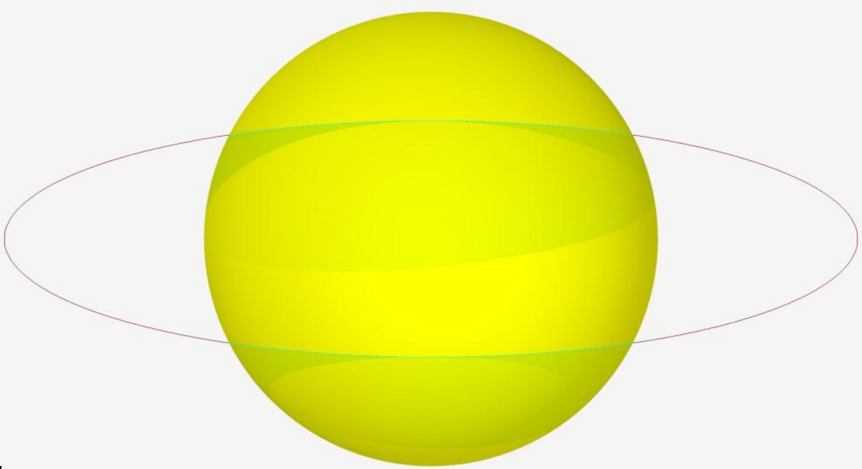
Come si vedrà in seguito, esiste anche una proiezione che darà luogo ad una parabola.



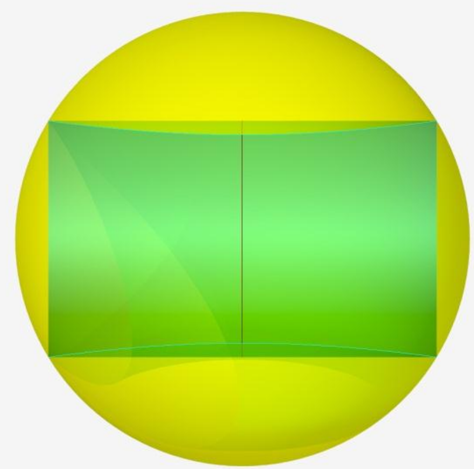
1.



4.



2.



3.

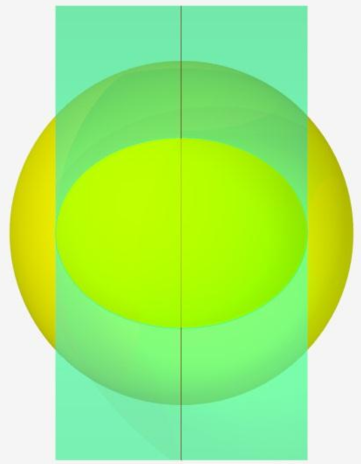
01c. Intersezione tra sfera e cilindro iperbolico; modalità:

- distanza tra i vertici minore del diametro della sfera;
- risultato: PaIpEll in due anelli.

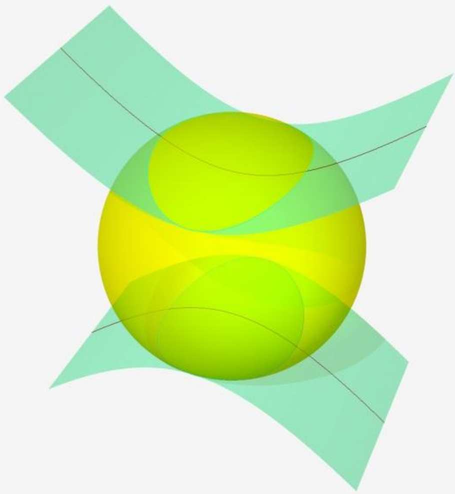
PaIpEll-iperbole, caratteristiche:

- proiezione 1, appare come un ellisse intero;
- proiezione 2, appare con due archi simmetrici di ellisse;
- proiezione 3, appare con due rami di iperbole.

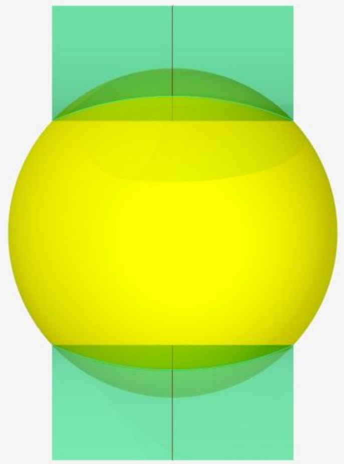
Come si vedrà in seguito, esiste anche una proiezione che darà luogo ad una parabola.



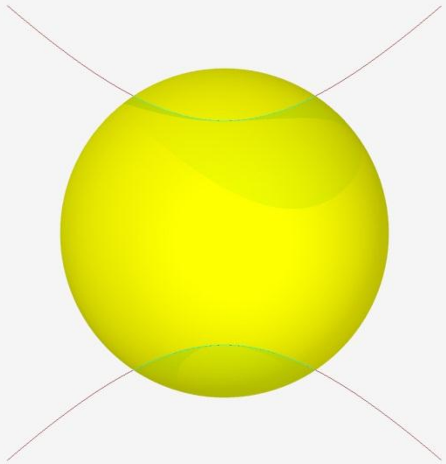
1.



4.



2.



3.

01d1. Intersezione tra sfera e cono parabolico; modalità:

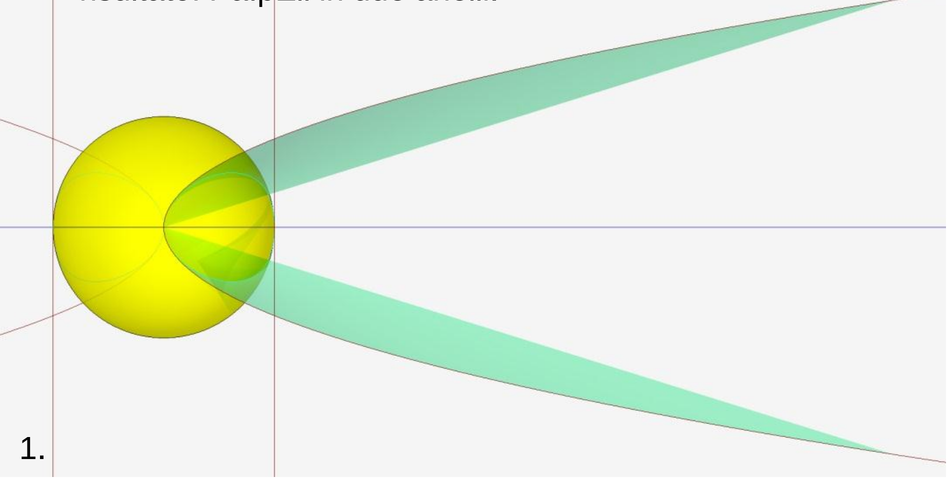
- asse di una delle parabole parallelo alla retta passante per due quadranti diametralmente opposti di PaIpEll;
- vertice sul quadrante distinto dalla retta;
- vertice del cono coincidente col centro della sfera;
- risultato: PaIpEll in due anelli.

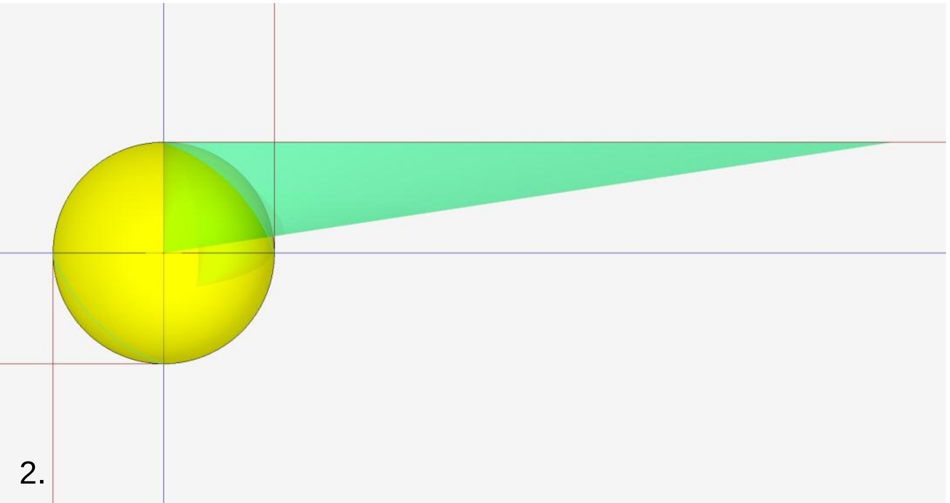
PaIpEll-parabola, problemi:

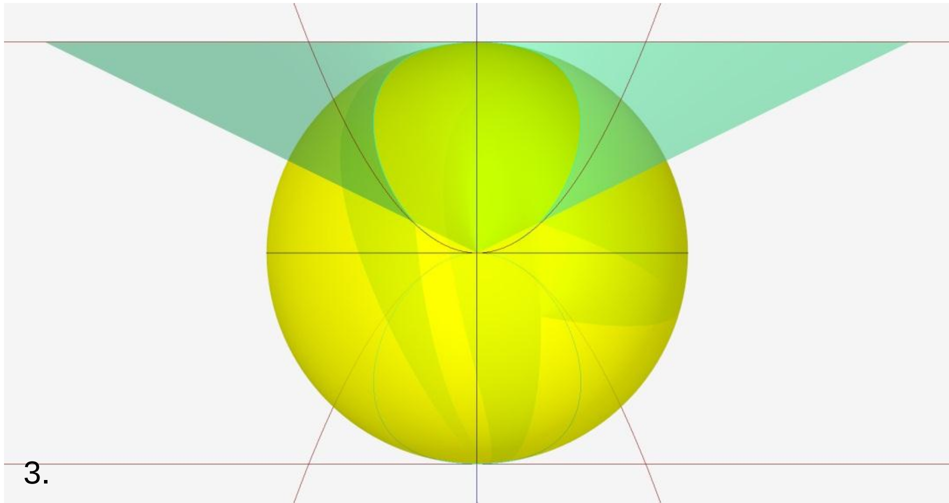
PaIpEll-parabola è compatibile con due coppie diametralmente opposte di coni parabolici simmetrici;

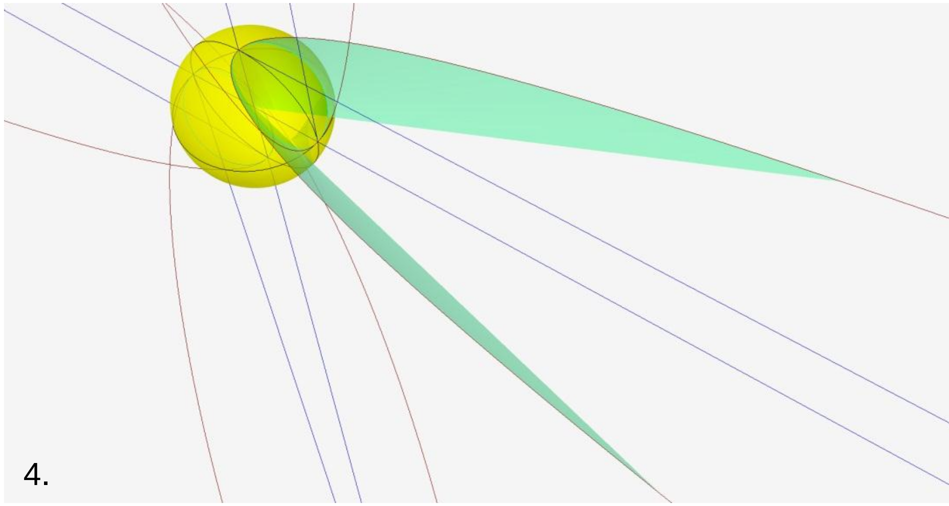
L’intersezione tra sfera e cono parabolico produce un luogo di punti sghembo rispetto al piano su cui giace la parabola.

Il luogo di punti risulterà completo solo quando il cono parabolico sarà chiuso.


1.


2.


3.


4.

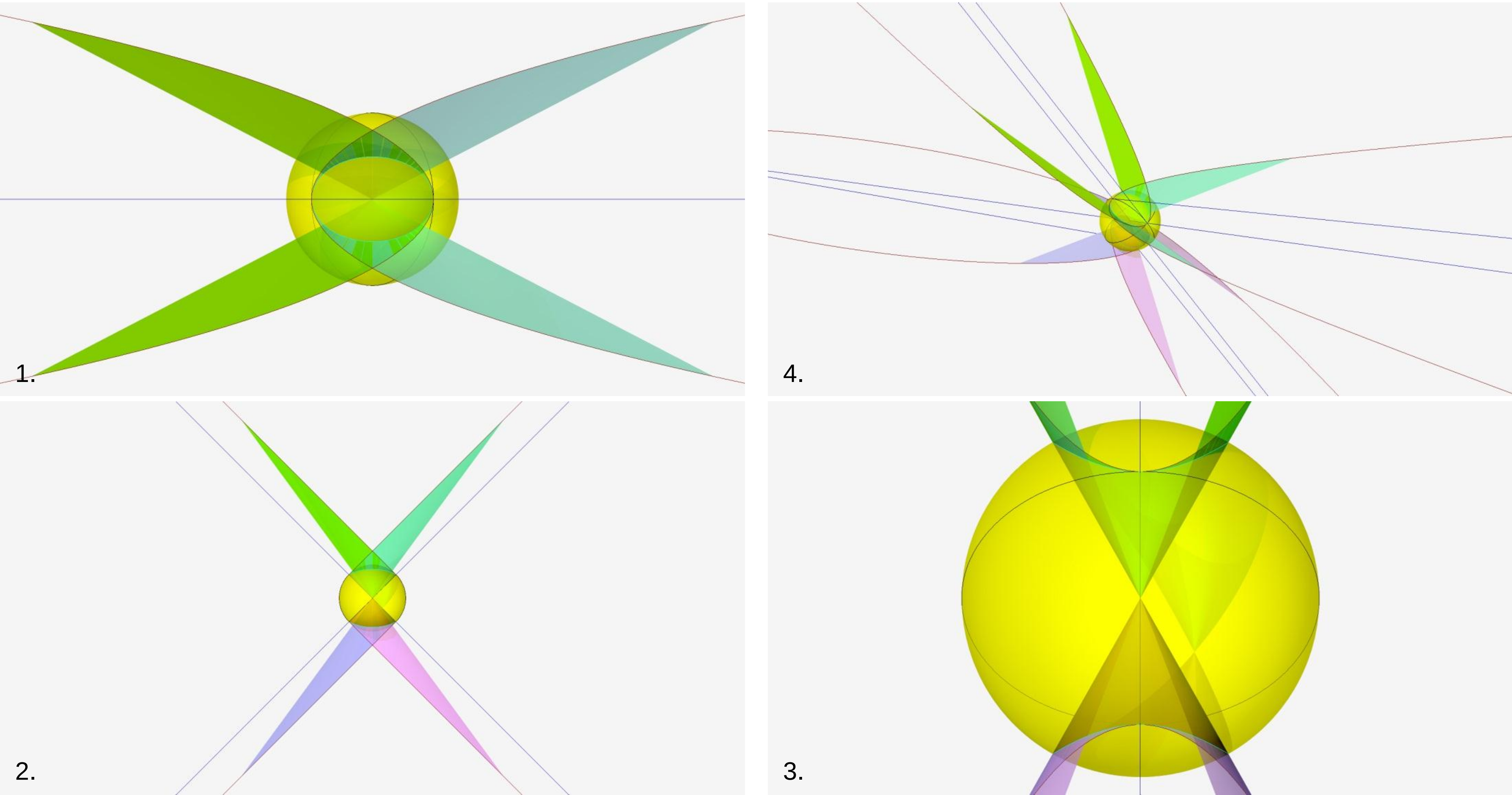
01d2. Intersezione tra sfera e cono parabolico; peculiarità:

Sono quattro i coni parabolici che opportunamente orientati producono coincidenti luoghi di punti.

Per far vedere in vera forma PaIpEll le figure sono rutate in modo opportuno.

PaIpEll-parabola, caratteristiche:

- proiezione 1, appare come un ellisse intero;
- proiezione 2, appare con due archi simmetrici di ellisse;
- proiezione 3, appare con due rami di iperbole.



02. Trovare i «fuochi» di PaIpEll:

Per successive operazioni geometriche può essere necessario disporre dei fuochi su PaIpEll.

La costruzione che segue si sviluppa senza ricorrere all’ausilio delle coniche nel piano.

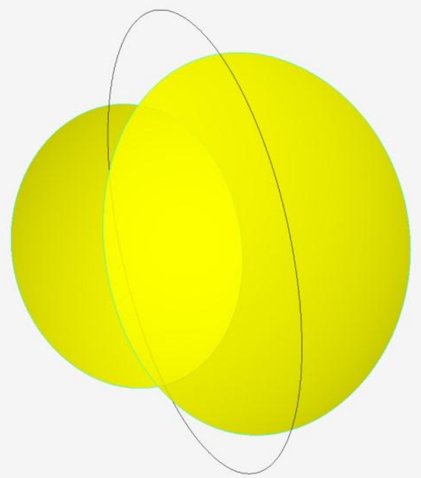
02. Trovare i «fuochi» di PaIpEll:

Cerchio e rettangolo sono complanari e i rispettivi piani sono normali a quello relativo al meridiano principale.

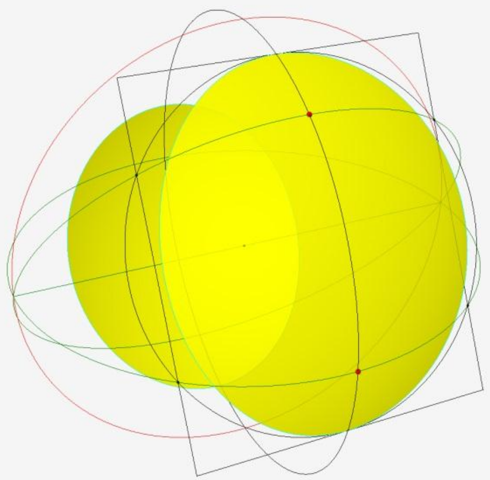
L’asse di rotazione dei meridiani di intersezione è complanare al piano degli archi minori di PaIpEll.

Operazione in tre passaggi:

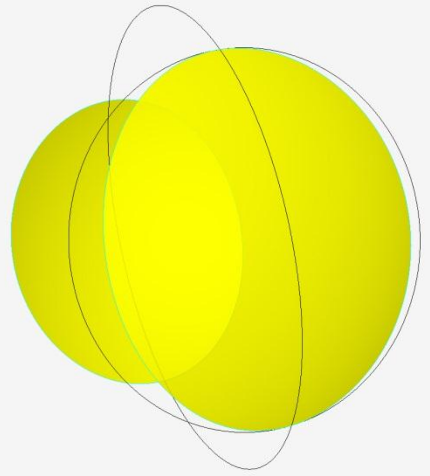
- 01, tracciare un cerchio passante per i due estremi dell’arco maggiore, come in figura 2.;
- 02, circoscrivere il cerchio con un rettangolo di massimo ingombro di PaIpEll, come in figura 3.;
- 03, intersecare l’arco maggiore di PaIpEll con meridiani passanti per i punti in cui cerchio e rettangolo si tagliano.



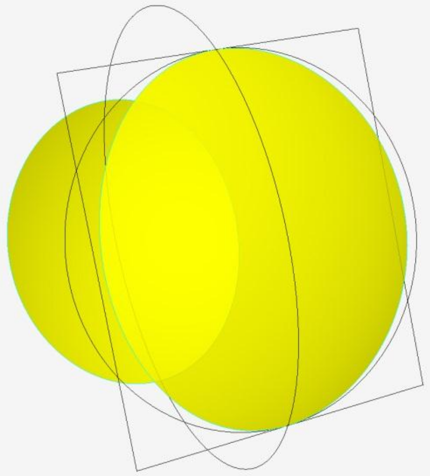
1.



4.



2.



3.

03. Intersezioni opportunamente coordinate tra sfera ed estrusioni di sezioni coniche.

La casualità delle figure di partenza considerate nella sezione 01. ha come corrispettivo la casualità dei PaIpEll che ne derivano tramite l'intersezione con la sfera.

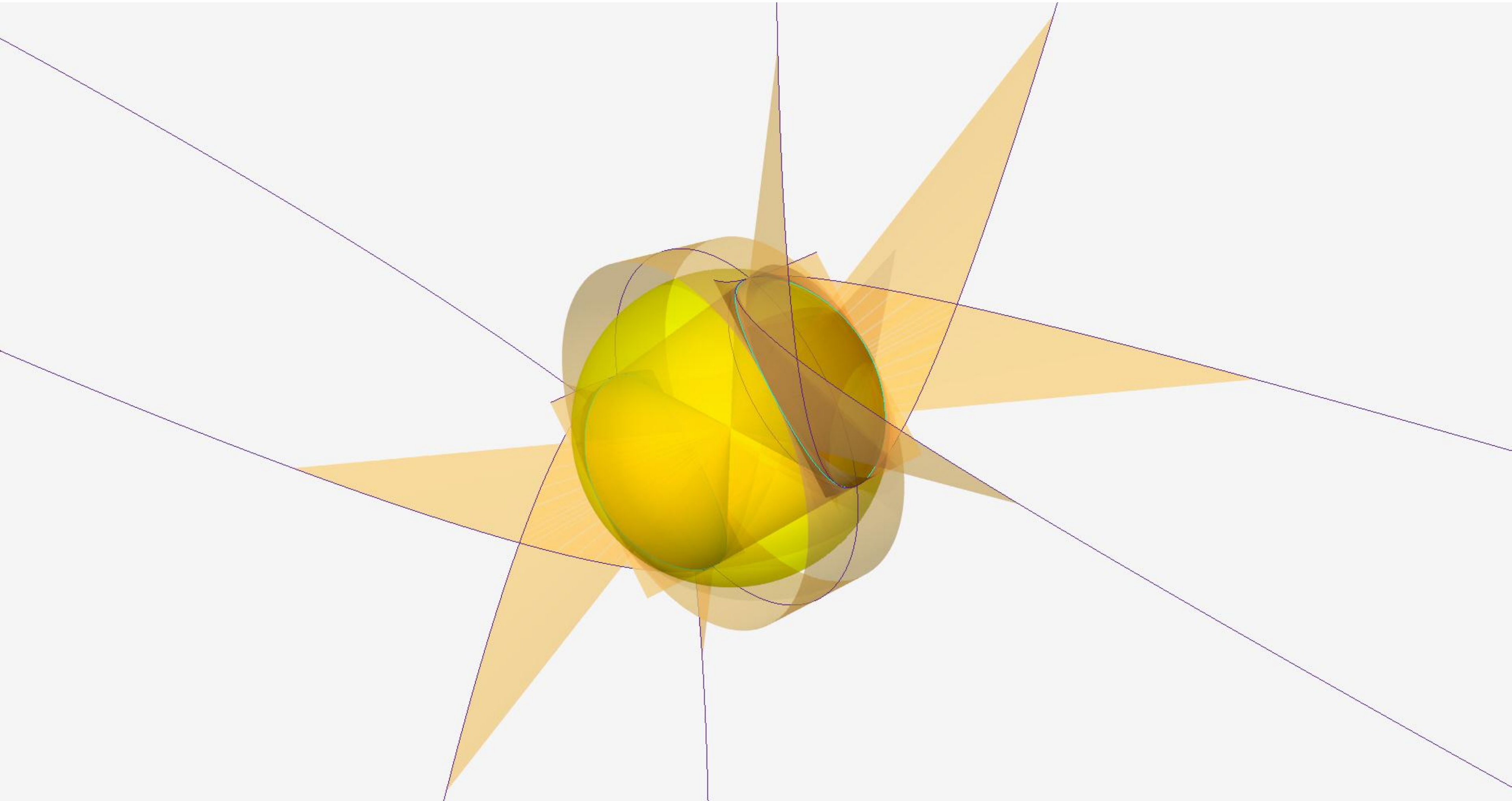
Ora verrà mostrato che ogni figura sezionante considerata, se opportunamente dimensionata, darà luogo a PaIpEll coincidenti tramite l'intersezione con la sfera. Ciò riveste importanza capitale, poiché una volta individuato un PaIpEll, a partire da una originaria figura sezionante, si potrà risalire a tutte le altre.

Nella presente sezione è fornita una visione preliminare e sintetica del problema. In seguito verranno forniti ulteriori ragguagli.

03a. Intersezioni opportunamente coordinate tra sfera ed estrusioni di sezioni coniche.

Risultato:

serie di luoghi di punti (PaIpEll) coincidenti.

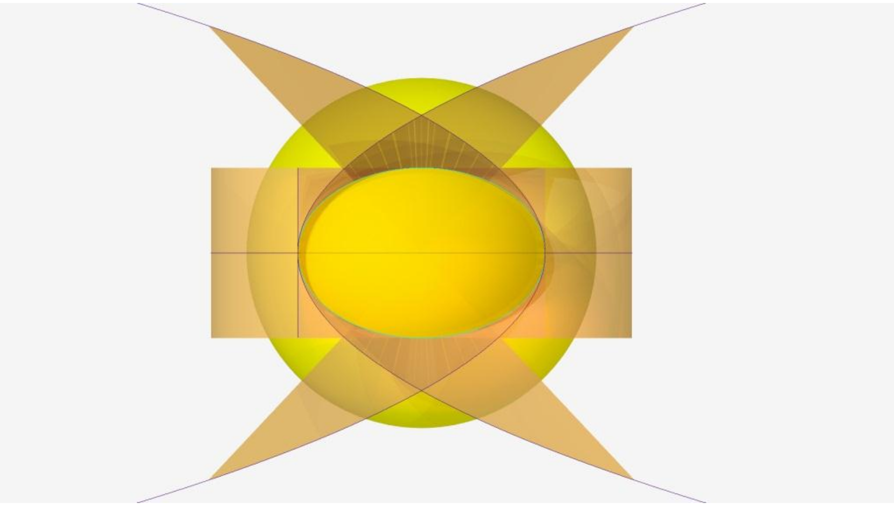


03b. Intersezioni opportunamente coordinate tra sfera ed estrusioni di sezioni coniche.

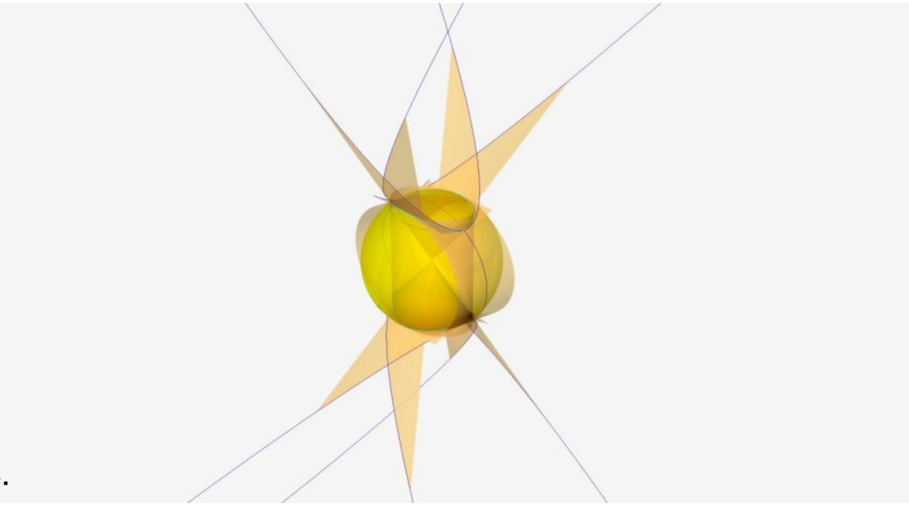
Sarà mostrato in seguito come coordinare le dimensioni delle coniche e delle relative estrusioni.

Serie di PaIpEll coincidenti, caratteristiche:

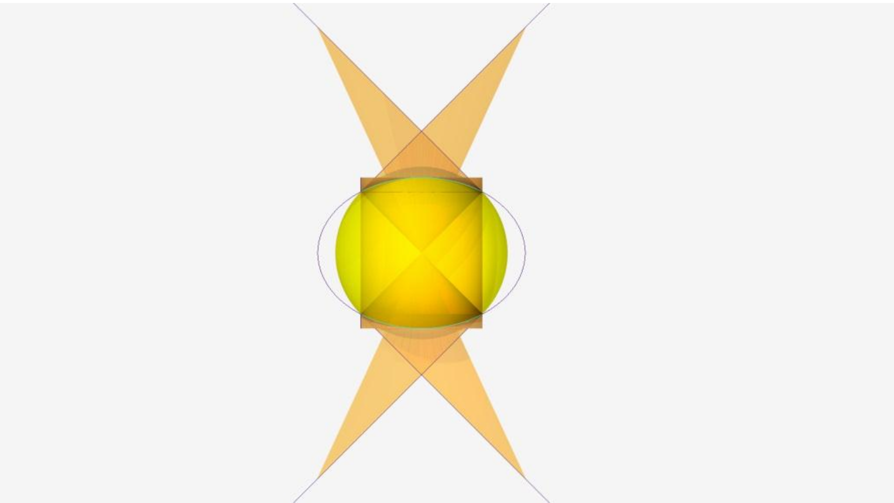
- proiezione 1, appaiono come unica ellisse intera;
- proiezione 2, appaiono come due archi simmetrici di ellisse;
- proiezione 3, appaiono come due rami di iperbole.



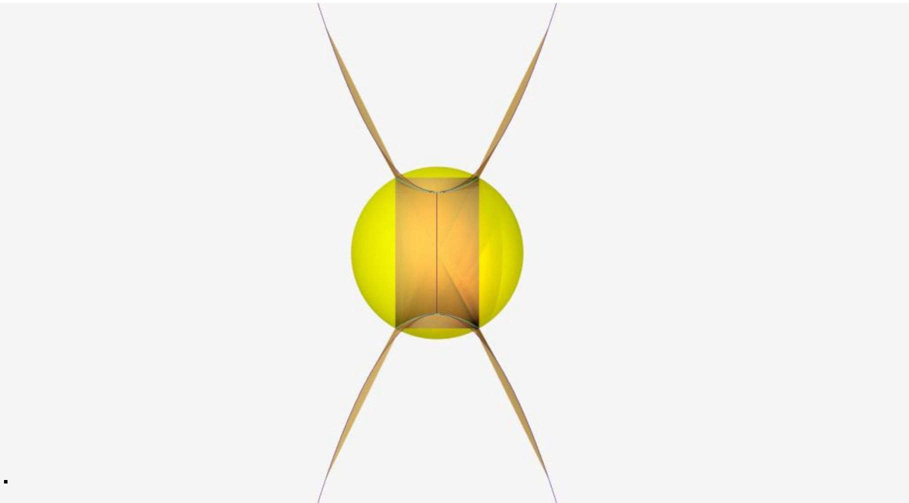
1.



4.



2.



3.

04. Proprietà di PaIpEll.

La proprietà essenziale dell'ellisse è che la «somma» delle distanze di un punto dai fuochi è costante.

La proprietà essenziale dell'iperbole è che la «differenza» tra le distanze di un punto dai fuochi è costante.

La proprietà essenziale della parabola è che la distanza di un punto da fuoco e direttrice è «uguale».

Nella presente sezione si mostra come tali proprietà sussistano anche nella geometria della sfera.

PaIpEll:

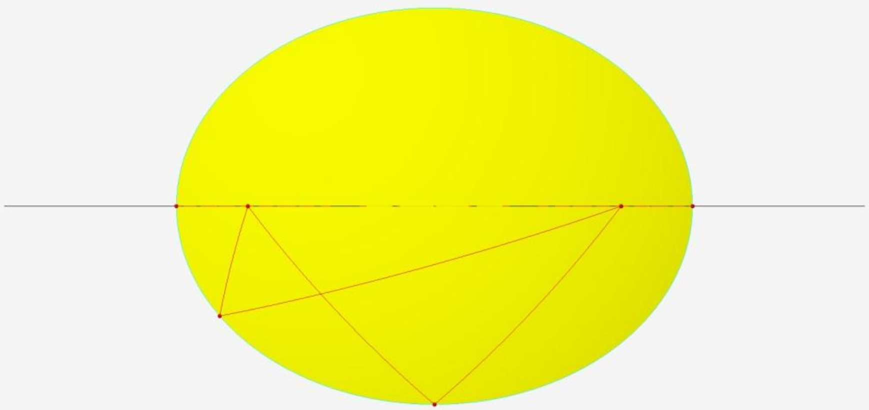
- ellisse (interna);
- ellisse (esterna);
- iperbole;
- parabola.

04a. Proprietà di PaIpEll.

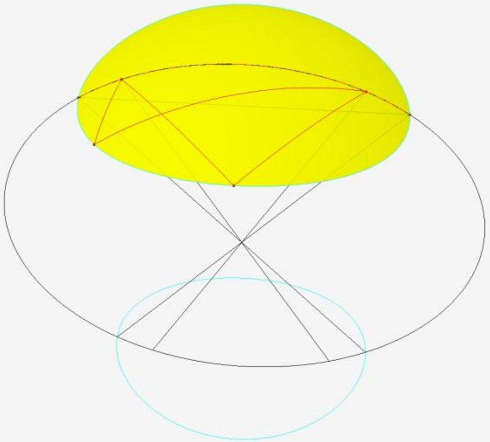
PaIpEll-ellisse:

come sarà successivamente dimostrato, anche sulla calotta sferica racchiusa da un PaIpEll, si verifica che la «somma» delle geodetiche di un punto dai fuochi è costante.

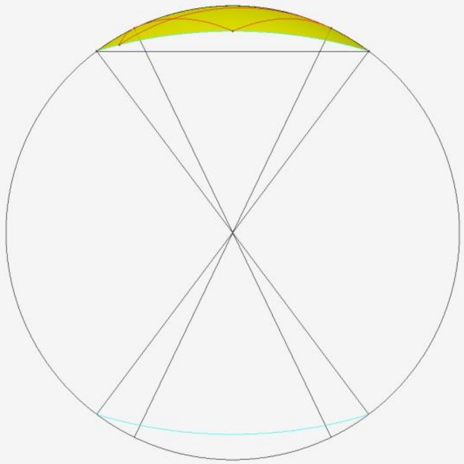
I fuochi sono definiti mediante il procedimento indicato nella sezione 02.



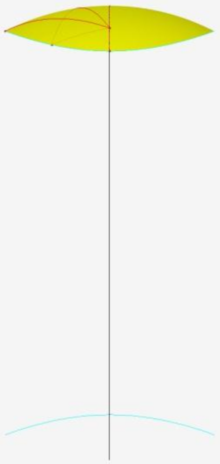
1.



4.



2.



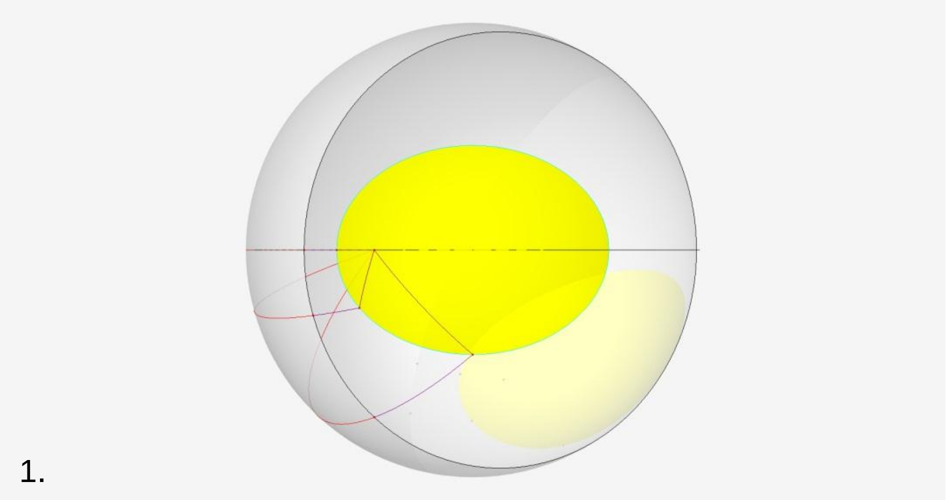
3.

04b. Proprietà di PaIpEll.

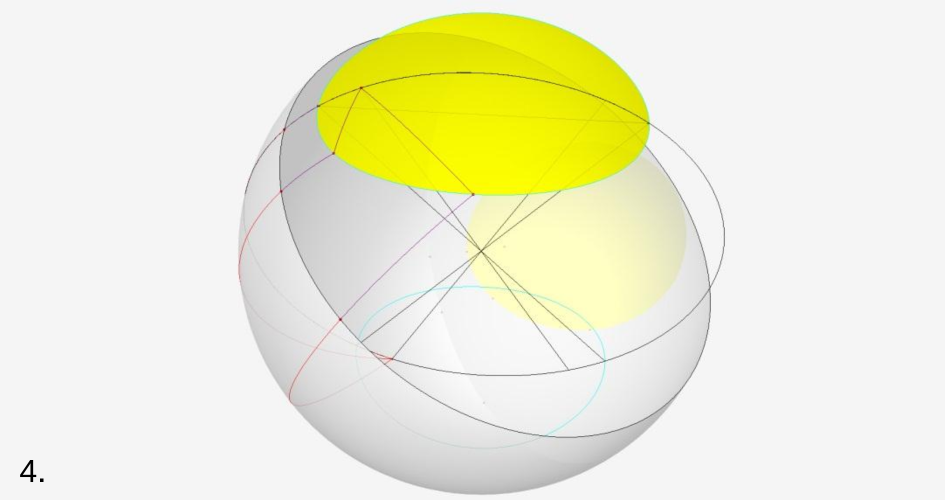
PaIpEll-iperbole:

come sarà successivamente dimostrato, anche sulla calotta sferica racchiusa da un PaIpEll, si verifica che la «differenza» tra le geodetiche di un punto dai fuochi è costante.

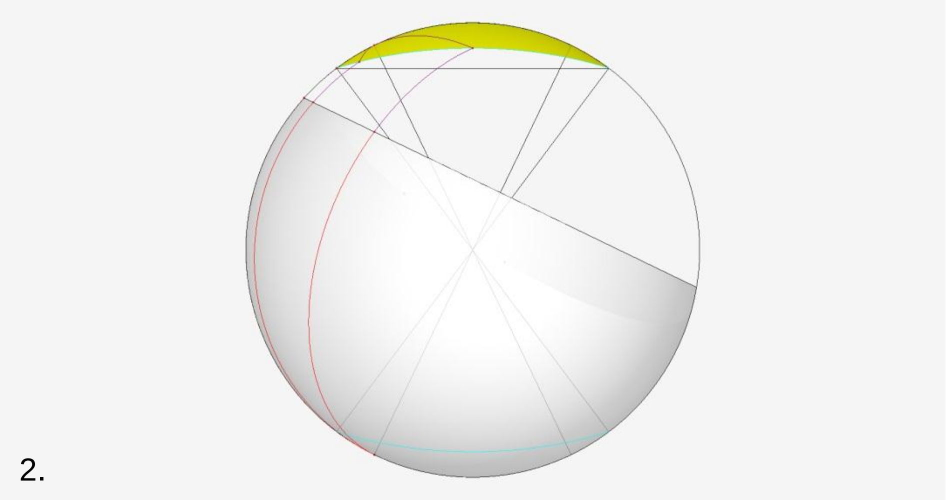
I fuochi sono definiti mediante il procedimento indicato nella sezione 02.



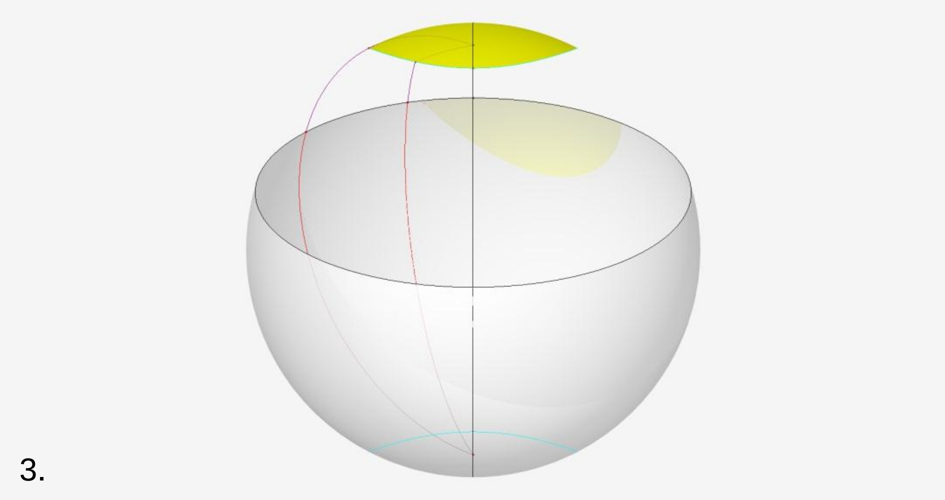
1.



4.



2.



3.

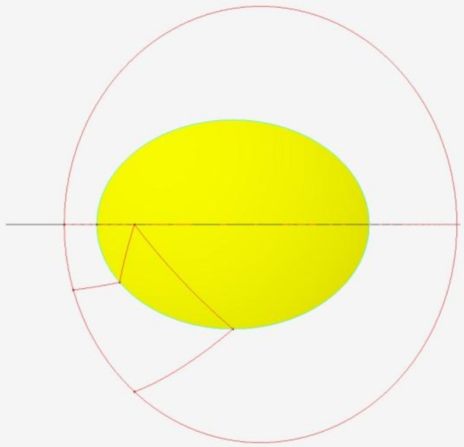
04c. Proprietà di PaIpEll.

Nella geometria sferica il cerchio-direttrice può non essere una geodetica, come invece avviene nel piano, dove la funzione di direttrice è esclusiva della retta, geodetica del piano medesimo.

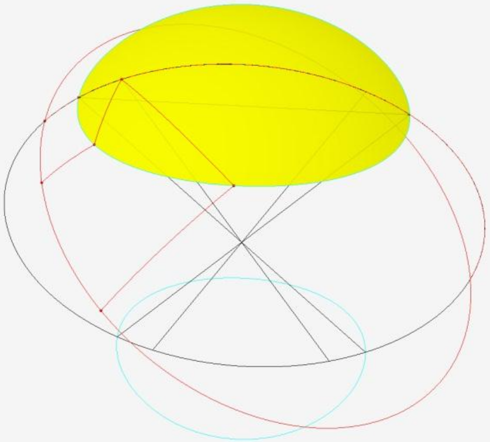
PaIpEll-parabola:

come sarà successivamente dimostrato, anche sulla calotta sferica racchiusa da un PaIpEll, si ha che le geodetiche che collegano un punto a fuoco e direttrice sono «uguali».

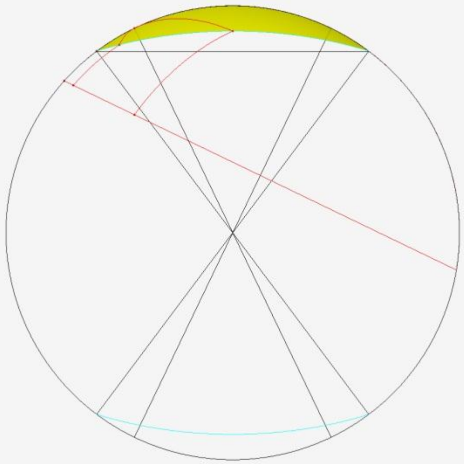
I fuochi sono definiti mediante il procedimento indicato nella sezione 02.



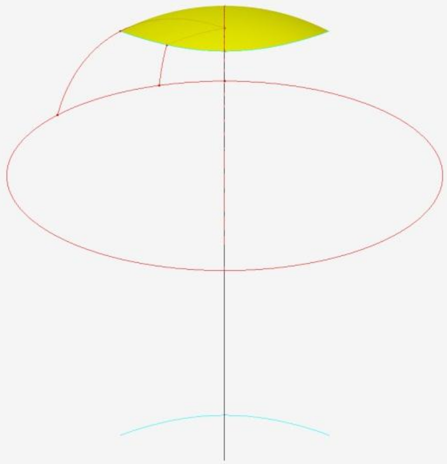
1.



4.



2.



3.

05. Dimostrazione di PaIpEll.

Seguono tre dimostrazioni relative a:

- PaIpEll-ellisse;
- PaIpEll-iperbole;
- PaIpEll-parabola.

Considerando come anche su superficie sferica valgano le proprietà che contraddistinguono le sezioni coniche nel piano, bisogna tenere presente che le distanze si misureranno non più in termini lunghezze di segmenti rettilinei, ma di ampiezze geodetiche le quali nella superficie sferica sono archi.

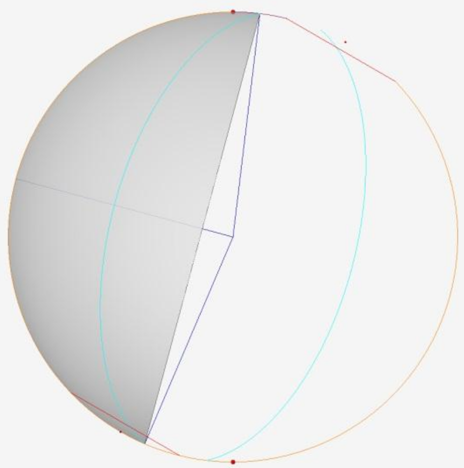
05a1. Dimostrazione di PaIpEll.

La dimostrazione di PaIpEll, nella chiave di ellisse, viene data secondo due modalità.

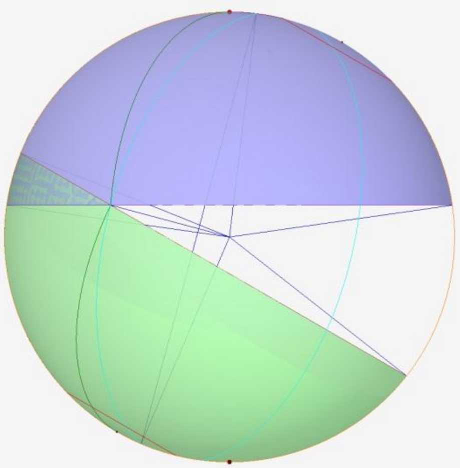
La prima modalità si basa sulla opportuna bi-rotazione di una calotta avente per orlo il cerchio che interseca le mezzerie degli archi di distanza. La linea di sezione della calotta coincide con l'arco maggiore di PaIpEll.

PaIpEll-ellisse (variante 1):

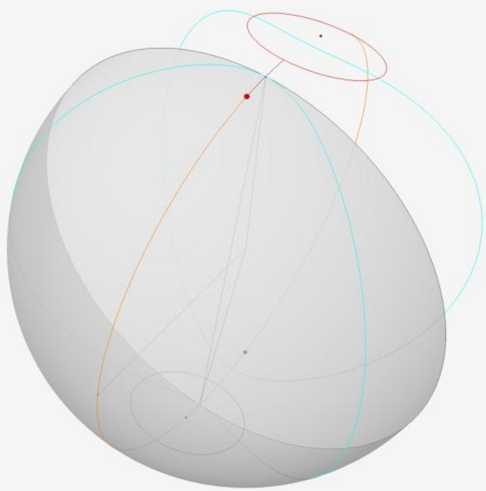
- bi-ruotare la calotta in modo che i rispettivi poli vadano a coincidere con quelli di uno dei due anelli di PaIpEll;
- gli orli si taglieranno in due punti, determinando meridiani uguali essendo uguali le calotte;
- pertanto, la somma delle loro ampiezze sarà uguale a quella della linea di sezione della calotta, ovvero dell'arco maggiore di PaIpEll.



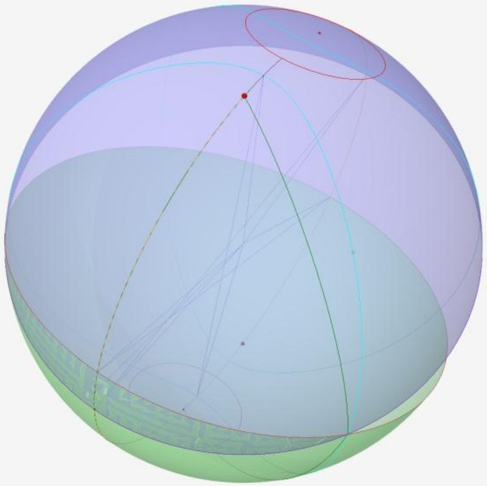
1.



3.



2.



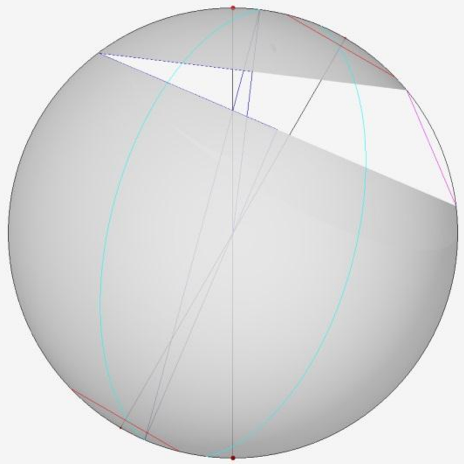
4.

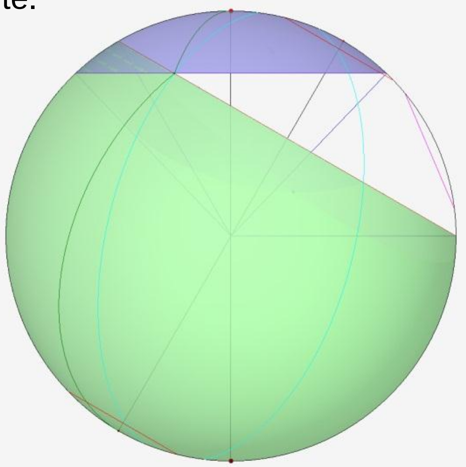
05a2. Dimostrazione di PaIpEll.

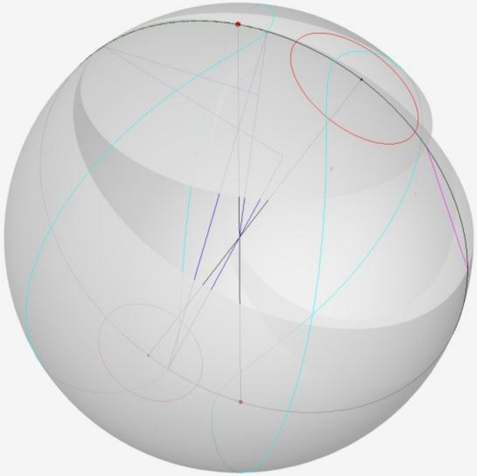
Questa seconda modalità si basa sulla opportuna rotazione e intersezione di due calotte la cui somma dei meridiani sia uguale all’arco maggiore di PaIpEll.

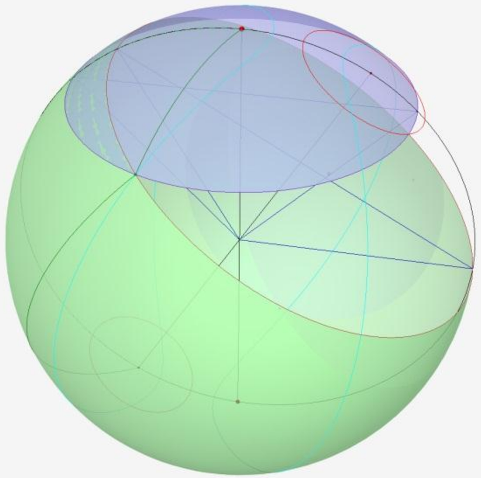
PaIpEll-ellisse (variante 2):

- ruotare ciascuna calotta in modo che i rispettivi poli vadano a coincidere con quelli di uno dei due anelli di PaIpEll;
- gli orli si taglieranno in due punti, determinando meridiani che se sommati avranno ampiezza pari a quella dell’arco maggiore;
- nuovamente, la somma delle apiezze di un punto dai fuochi risulta costante.


1.


3.


2.

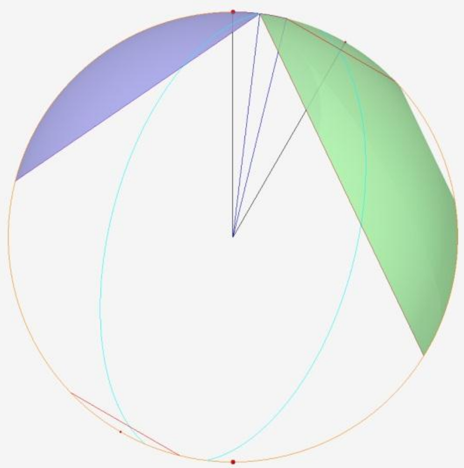

4.

05b. Dimostrazione di PaIpEll.

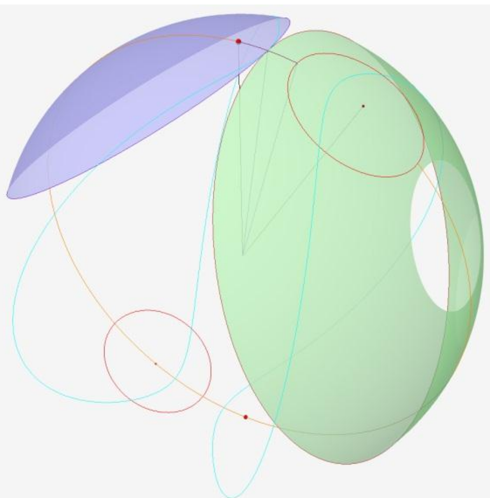
Proprietà dell'iperbole su superficie piana: la differenza delle distanze di un punto dai fuochi è costante.

La dimostrazione si basa su rotazione e intersezione di calotte e fasce sferiche di uguale meridiano.

È da osservare che, essedo uno dei due cerchi ridotto a punto, l'orlo interno della fascia risulta uguale al cerchio raccordando.



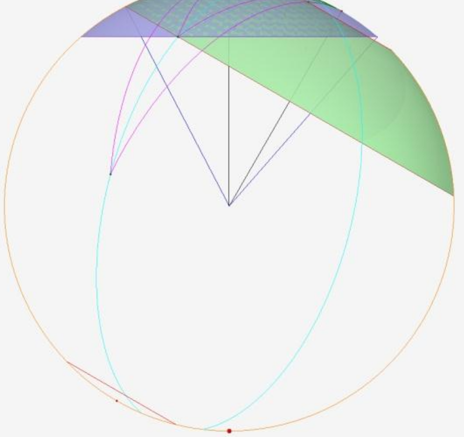
1.



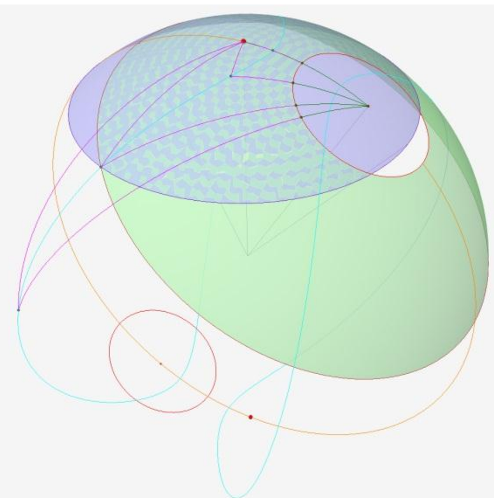
2.

PaIpEll-iperbole:

- costruire con arco a piacere una calotta, costruire una fascia con stesso arco diviso a metà; ruotare facendo in modo che i poli vadano a coincidere con due di quelli contigui di PaIpEll;
- gli orli si taglieranno in un punto equidistante dal polo della calotta e dall'orlo interno della fascia e ciò, per ogni punto, sarà l'ampiezza da sottrarre alla geodetica più lunga per avere la differenza costante (meridiani della calotta interna alla fascia).



3.



4.

05c. Dimostrazione di PaIpEll.

Proprietà della parabola su superficie piana: la distanza di un punto da fuoco e direttrice è uguale.

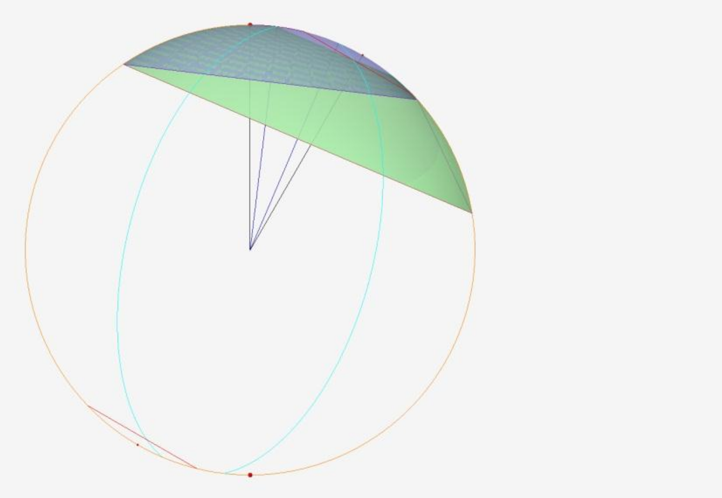
Valgono le stesse calotte e fasce sferiche dell'iperbole.

Il corrispettivo della retta (direttrice) nella sfera sarebbe il meridiano, ma per PaIpEll fungono da «direttrice» anche i paralleli.

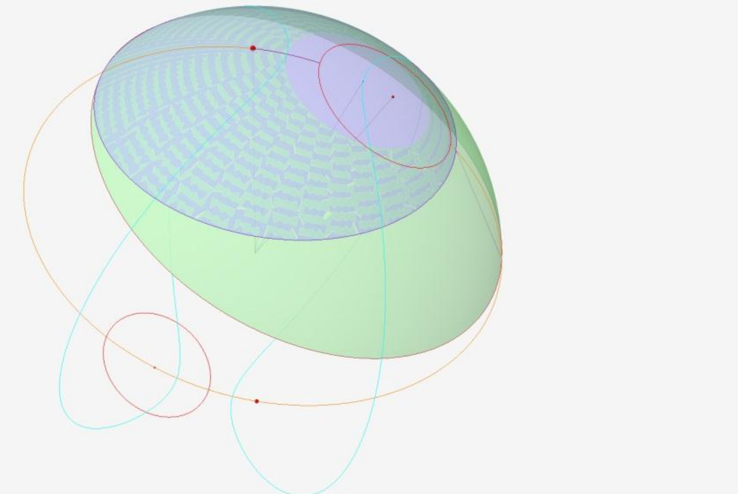
PaIpEll-parabola:

- costruire con arco a piacere una calotta, costruire una fascia con stesso arco diviso a metà; ruotare facendo in modo che i poli vadano a coincidere con due di quelli contigui di PaIpEll;
- gli orli si taglieranno in un punto equidistante dal polo della calotta e dall'orlo interno della fascia.

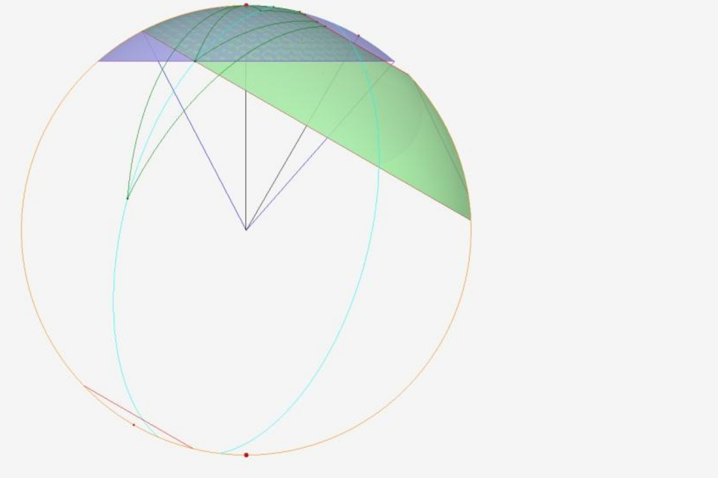
In questo caso l'orlo interno della fascia coincide con il cerchio raccordando.



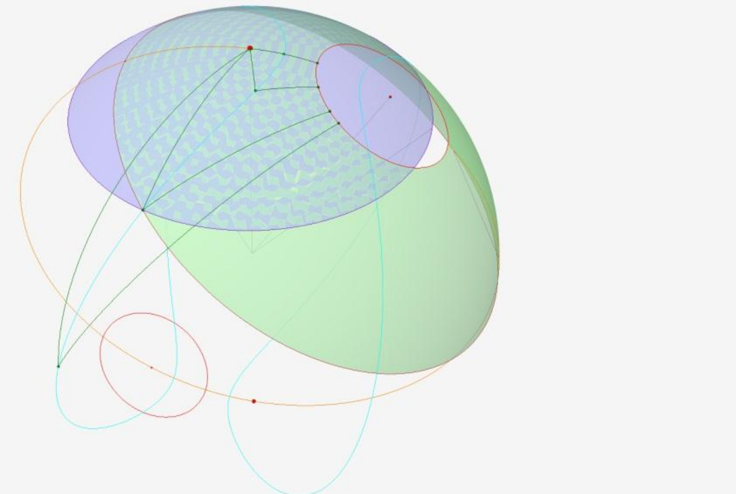
1.



2.



3.



4.

06. Sviluppare il problema inverso:

dato un luogo di punti di tipo PaIpEll, trovare la conica.

Risalire a:

- ellisse (interna);
- ellisse (esterna);
- iperbole;
- parabola.

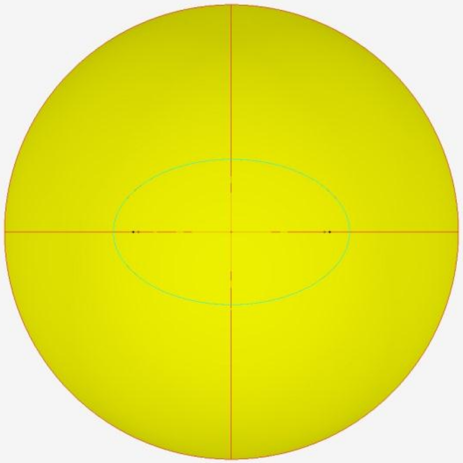
06a. Dato un luogo di punti di tipo PaIpEll, trovare la conica.

Si danno per scontate una serie di operazioni preliminari volte a localizzare PaIpEll sulla sfera o parti cruciali di esso.

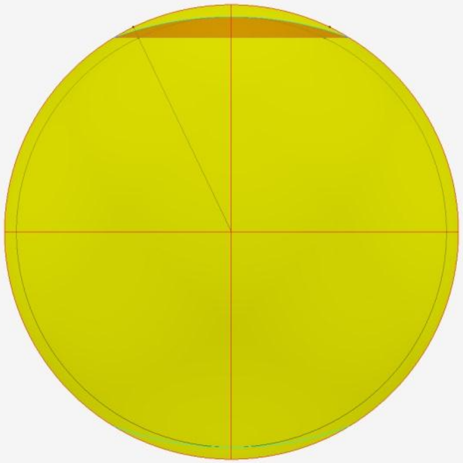
I fuochi sono determinati intersecando la corda con raggi passanti per i fuochi di PaIpEll.

Risalire all’ellisse (interna):

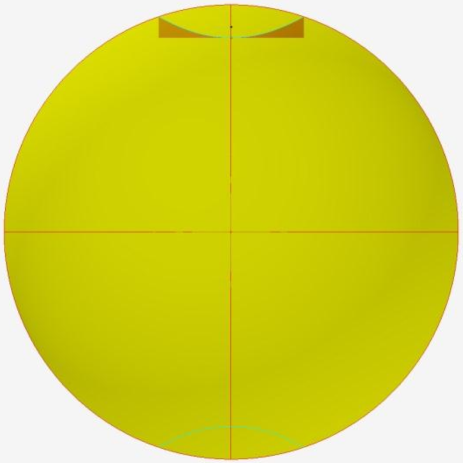
- trovare la corda relativa all’arco maggiore;
- definire un piano passante per la corda e normale al piano relativo al meridiano principale;
- proiettare sul piano i quadranti relativi all’arco minore;
- tracciare l’ellisse utilizzando gli estremi della corda e i punti proiettati sul piano dai quadranti.



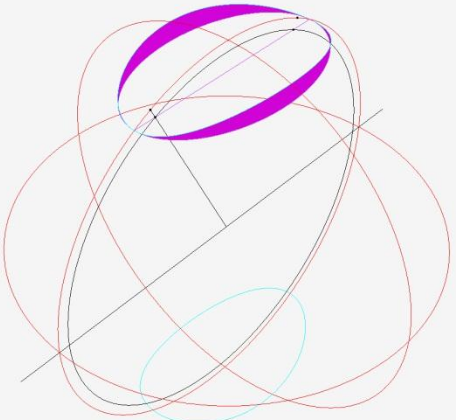
1.



2.



3.



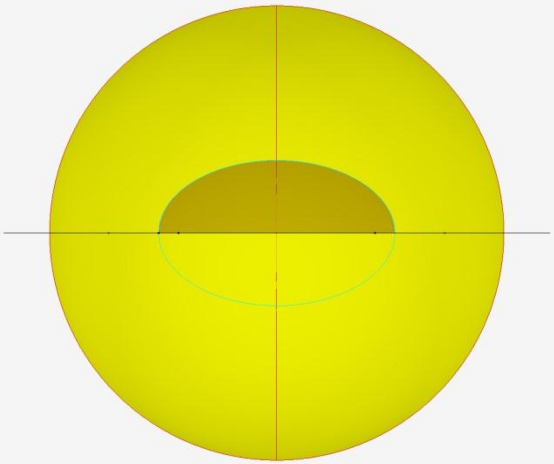
4.

06b1. Dato un luogo di punti di tipo PalpEll, trovare la conica.

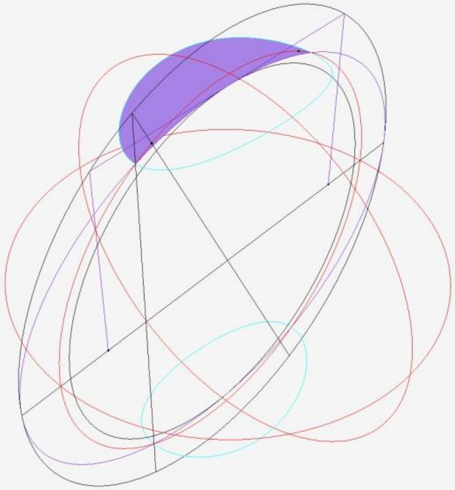
I fuochi sono determinati intersecando l’asse maggiore con le parallele all’asse minore, spiccate nel punto in cui la tangente per un quadrante minore taglia il cerchio esterno.

Risalire all’ellisse (esterna): versione 1.

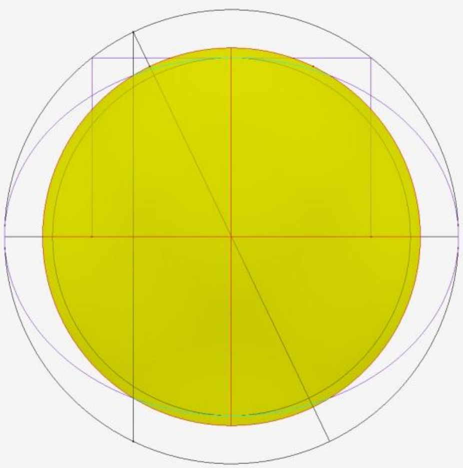
- ribaltare sull’asse maggiore il punto di congiunzione tra estensione del raggio passante per il fuoco di PalpEll e la retta passante per i relativi due quadranti minori;
- il quadrante minore è determinato dal raggio del cerchio che sfiora le mezzerie degli archi maggiori dei due opposti PalpEll.



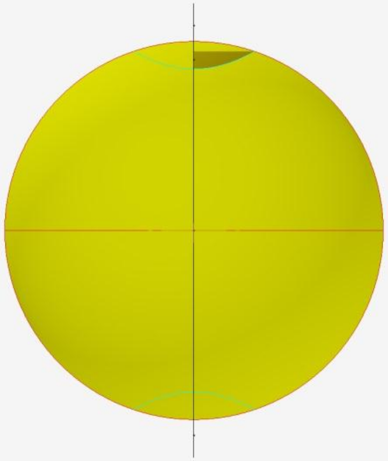
1.



4.



2.



3.

06b2. Dato un luogo di punti di tipo PalpEll, trovare la conica.

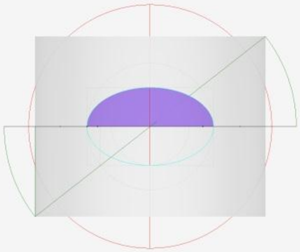
La tracciatura di cui alla pagina precedente ha per presupposto implicito la sottostante costruzione.

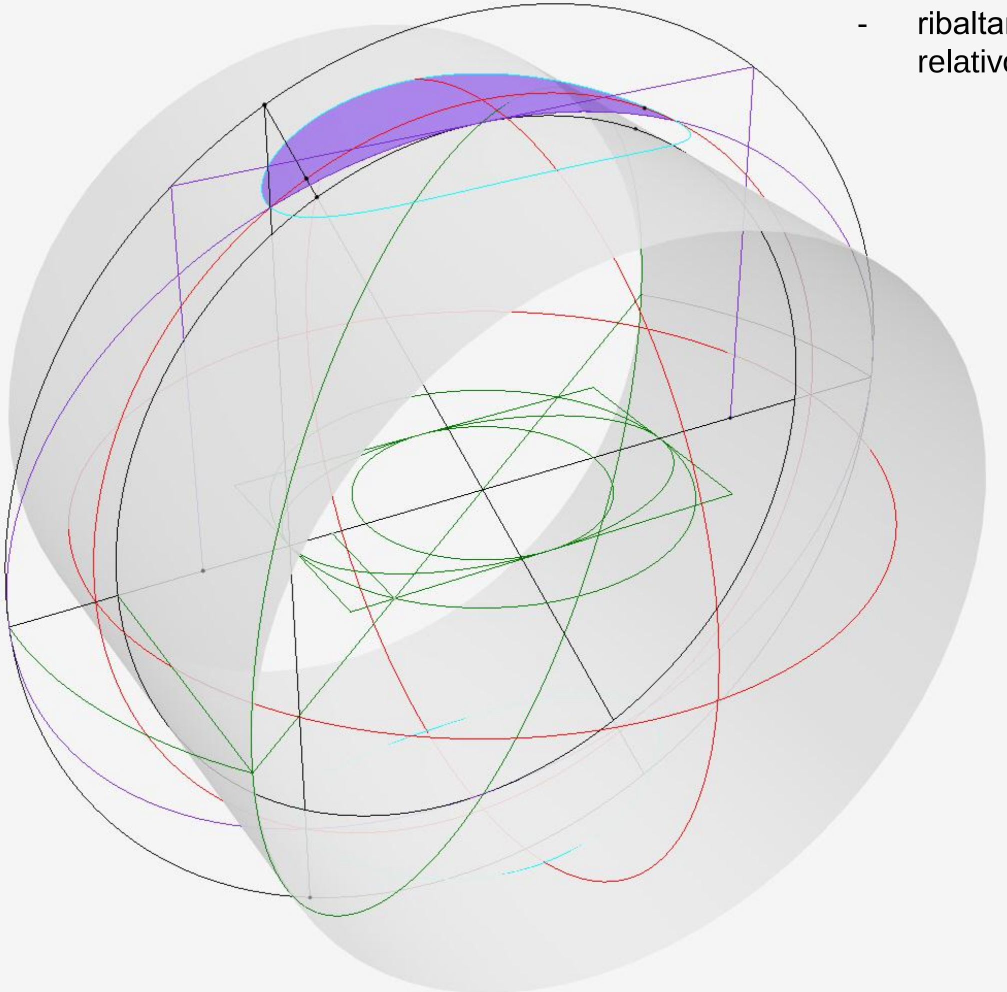
Il problema consiste nel trovare un ellisse a partire da due suoi archi simmetrici.

Risalire all’ellisse (esterna): versione 2.

- determinare un cerchio che sfiori le mezzerie dei due archi maggiori dei due opposti PalpEll;
- estrudere opportunamente il cerchio formando un cilindro;
- tagliare il cilindro con un piano secondo le modalità indicate nelle figure con le linee di colore verde;
- ribaltare l’ellisse ottenuto sul piano relativo al meridiano maggiore.

1.





2.

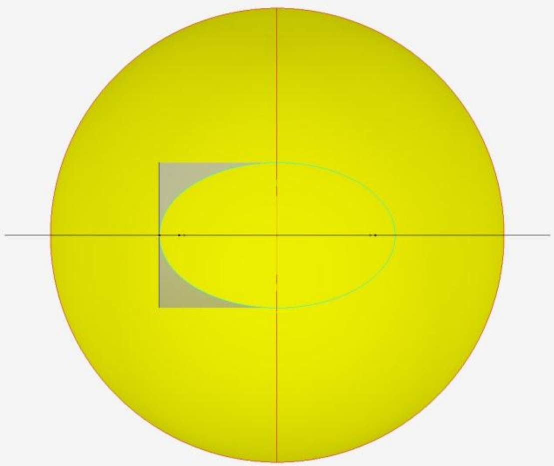
06c. Dato un luogo di punti di tipo PaIpEll, trovare la conica.

I vertici dell'iperbole coincidono con i quadranti adiacenti dei due archi maggiori. L'origine coincide con la proiezione del centro della sfera sul piano su cui giace l'iperbole.

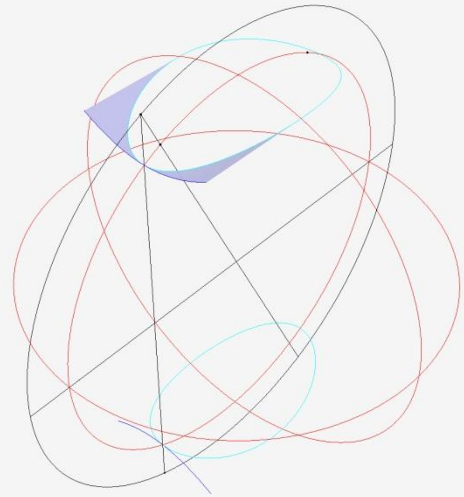
I fuochi sono determinati intersecando il piano con il prolungamento del raggio passante PaIpEll.

Risalire all'iperbole:

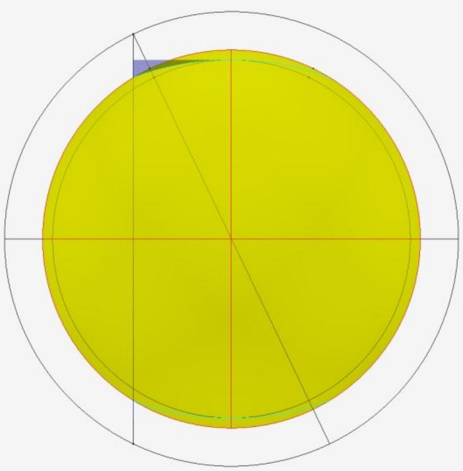
- tracciare una retta passante per il centro della sfera ed uno dei fuochi di PaIpEll;
- fissare il fuoco intersecando un piano normale alla corda e passante per i quadranti adiacenti dei due archi maggiori;
- definire un punto dell'iperbole proiettando sul piano i quadranti relativi all'arco minore.



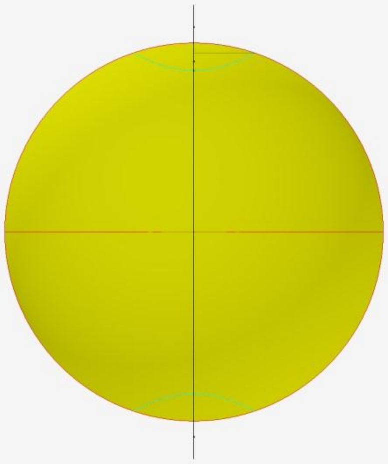
1.



4.



2.



3.

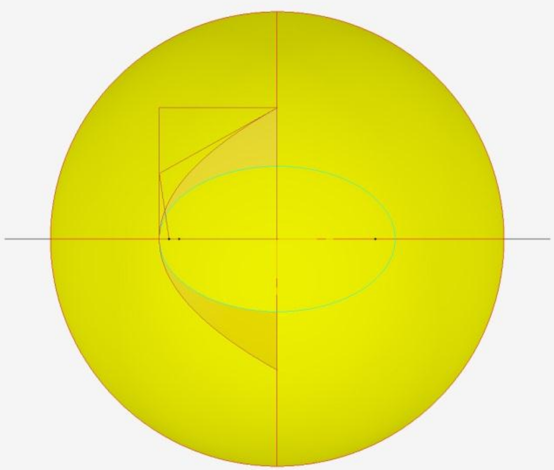
06d1. Dato un luogo di punti di tipo PaIpEll, trovare la conica.

Trovati vertice e fuoco, mediante opportune operazioni, la parabola è definita.

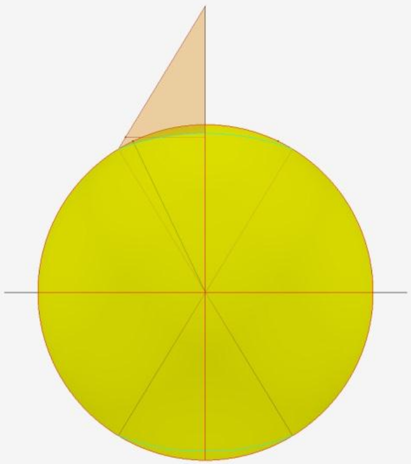
Il fuoco è determinato proiettando sull’asse il punto di intersezione tra una tangente alla parabola e la parallela alla direttrice passante per il vertice.

Risalire alla parabola: versione 1.

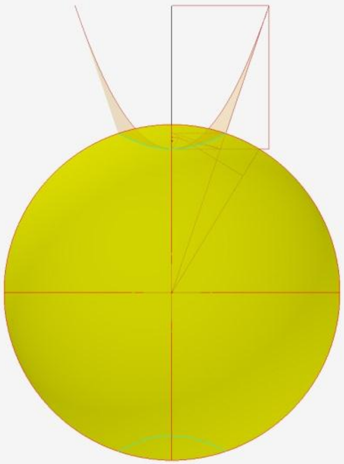
- tracciare il raggio relativo a un quadrante di arco maggiore;
- tracciare una retta passante per il centro della sfera ed un punto a piacere di PaIpEll (p. es. quadrante minore);
- intersecare la retta con un piano simmetrico al raggio rispetto la congiungente i due quadranti minori di PaIpEll;
- il vertice della parabola coincide con l’estremo del raggio.



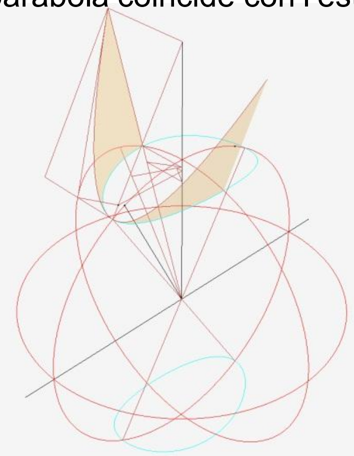
1.



2.



3.



4.

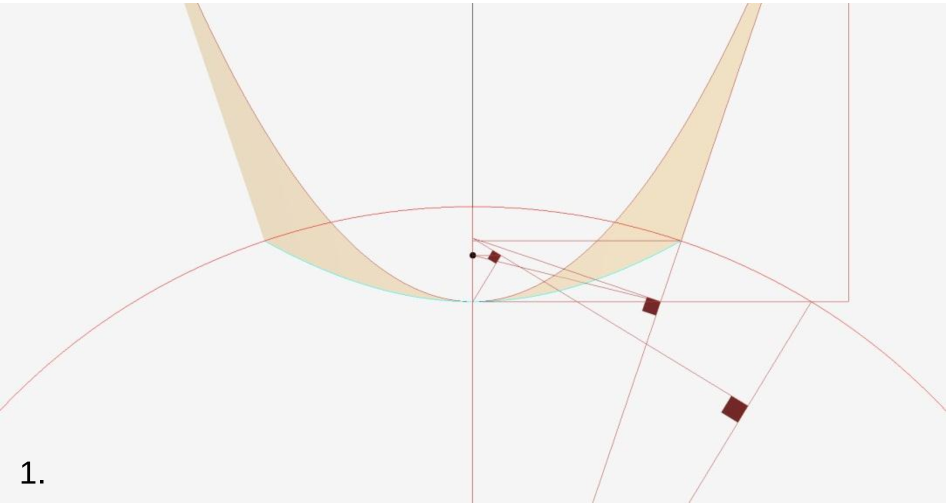
06d2. Dato un luogo di punti di tipo PaIpEll, trovare la conica.

Come nei casi precedenti, la determinazione del fuoco della parabola può avvenire anche a prescindere dal metodo di cui alla pagina precedente, ovvero indipendentemente dalla tracciatura della linea mediante la tecnica della tangente.

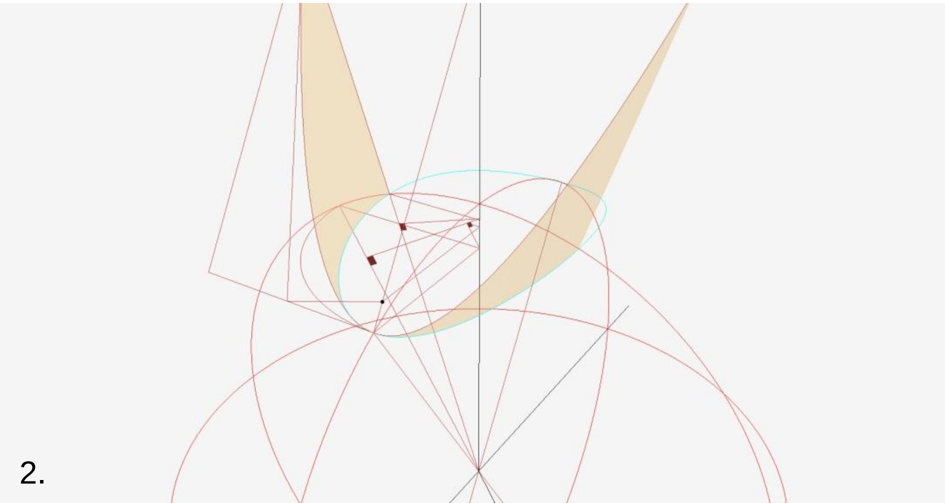
La procedura presenta passaggi meno semplici, rispetto ai casi di ellisse (interna e esterna) e iperbole, tuttavia sempre espletabili con riga e compasso.

Risalire alla parabola: versione 2.

- tracciare il raggio relativo a un quadrante di arco maggiore;
- tracciare una retta passante per il centro della sfera ed un punto a piacere di PaIpEll (p. es. quadrante minore);
- ribaltare sullo stesso piano il raggio;
- collegare il suo estremo all'asse (verticale) con una normale ad esso;
- dall'intersezione tra questa e la retta di cui al -2., spiccare una sua normale che vada ad intersecare l'asse (verticale);
- dal punto ottenuto spiccare una normale al raggio ribaltato;
- spiccare ora dal punto di intersezione tra la retta di cui al -4. e l'asse (verticale) una parallela al raggio ribaltato; la quota del fuoco è trovata; occorre ora produrre opportune proiezioni e ribaltamenti per arrivare ad intersecare l'asse della parabola.



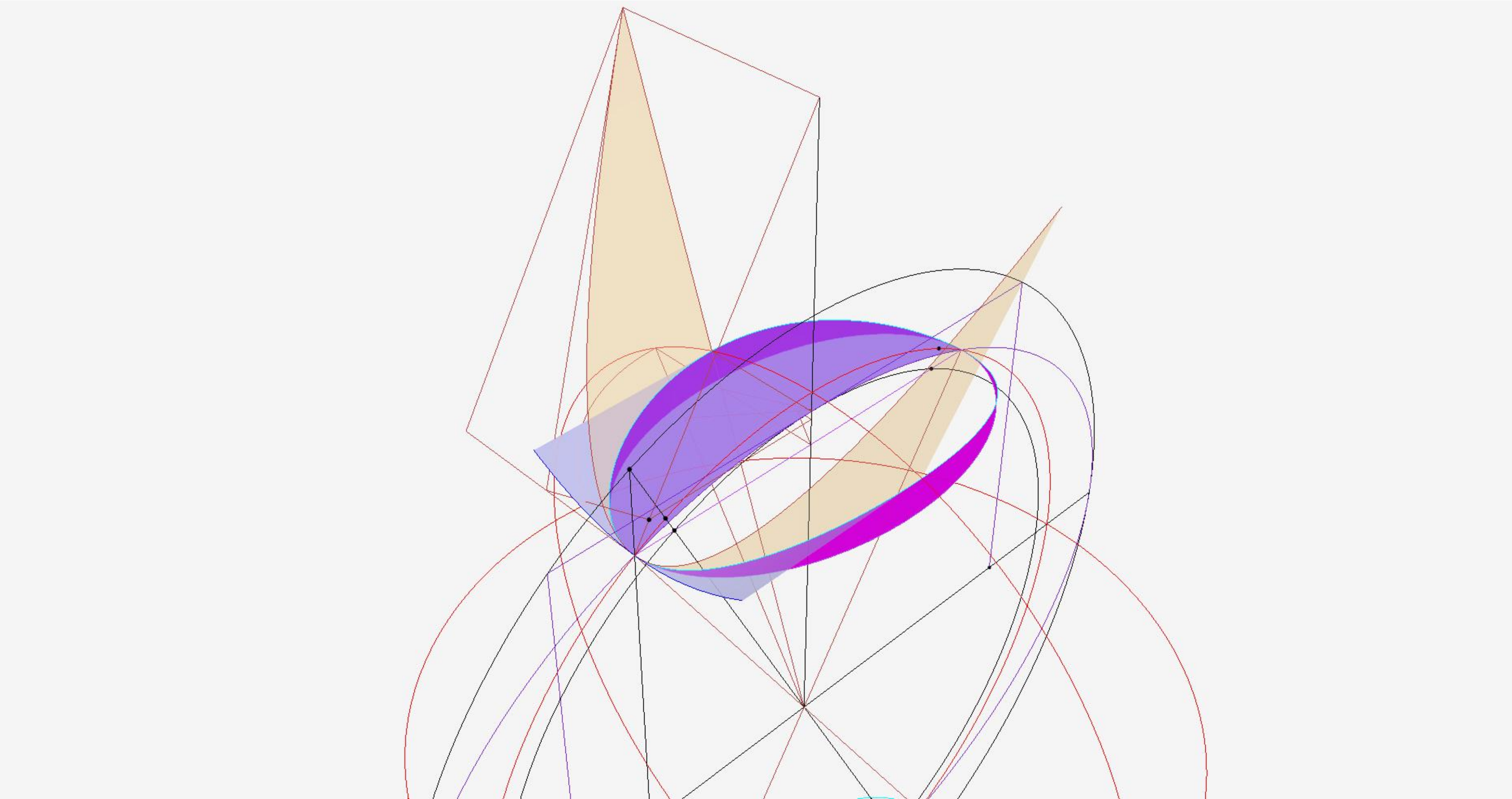
1.



2.

06e. Dato un luogo di punti di tipo PaIpEll, trovare la conica.

Rappresentare tutte le coniche insieme:

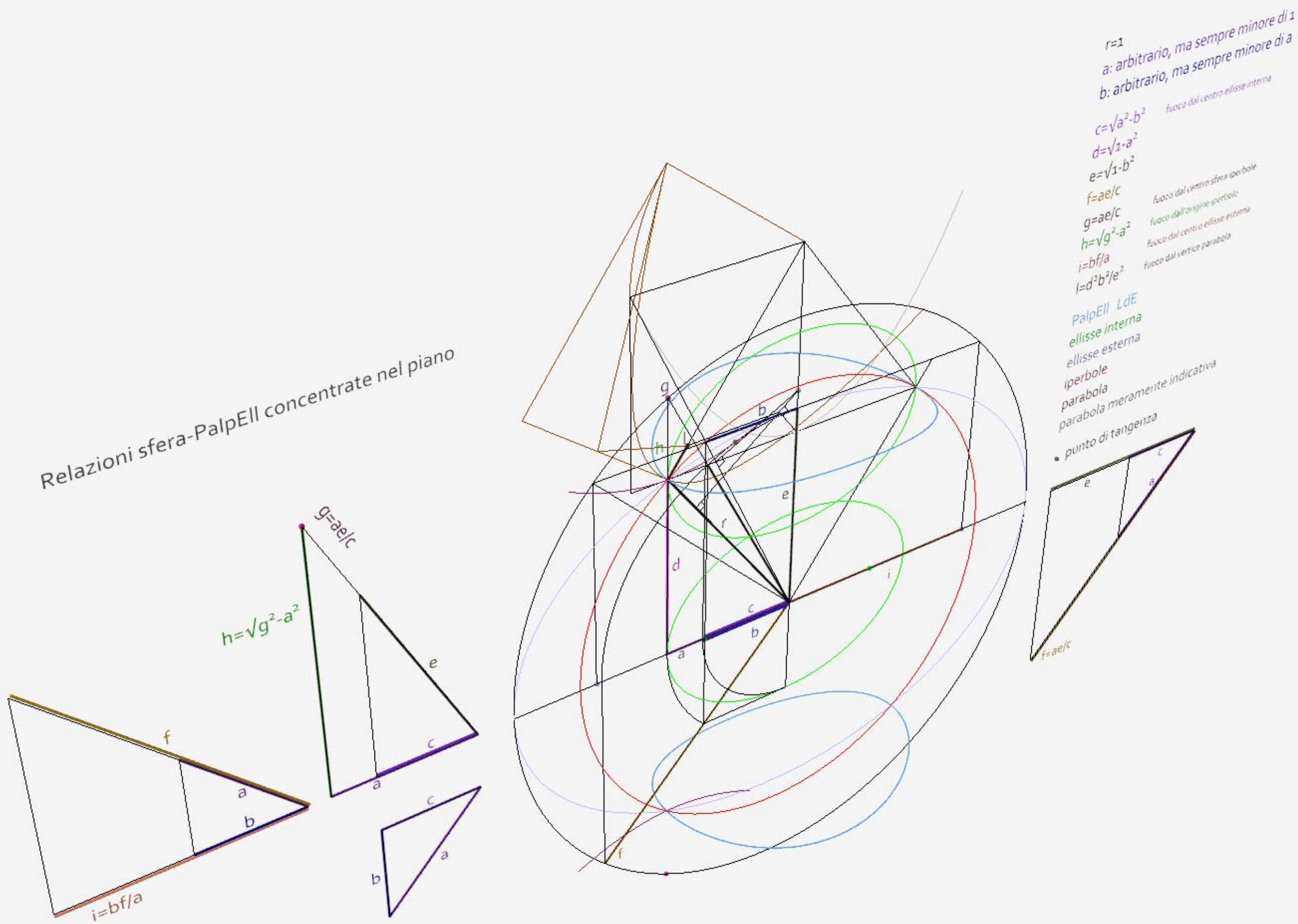


06f1. Portare tutto su un piano.

Individuare gli elementi probanti.

Sviluppando opportuni esercizi di proiezione e ribaltamento, si possono trasferire tutte le costruzioni su di un unico piano.

Diventa così più semplice reperire tutti gli elementi necessari per dare prova della correttezza delle ipotesi avanzate.

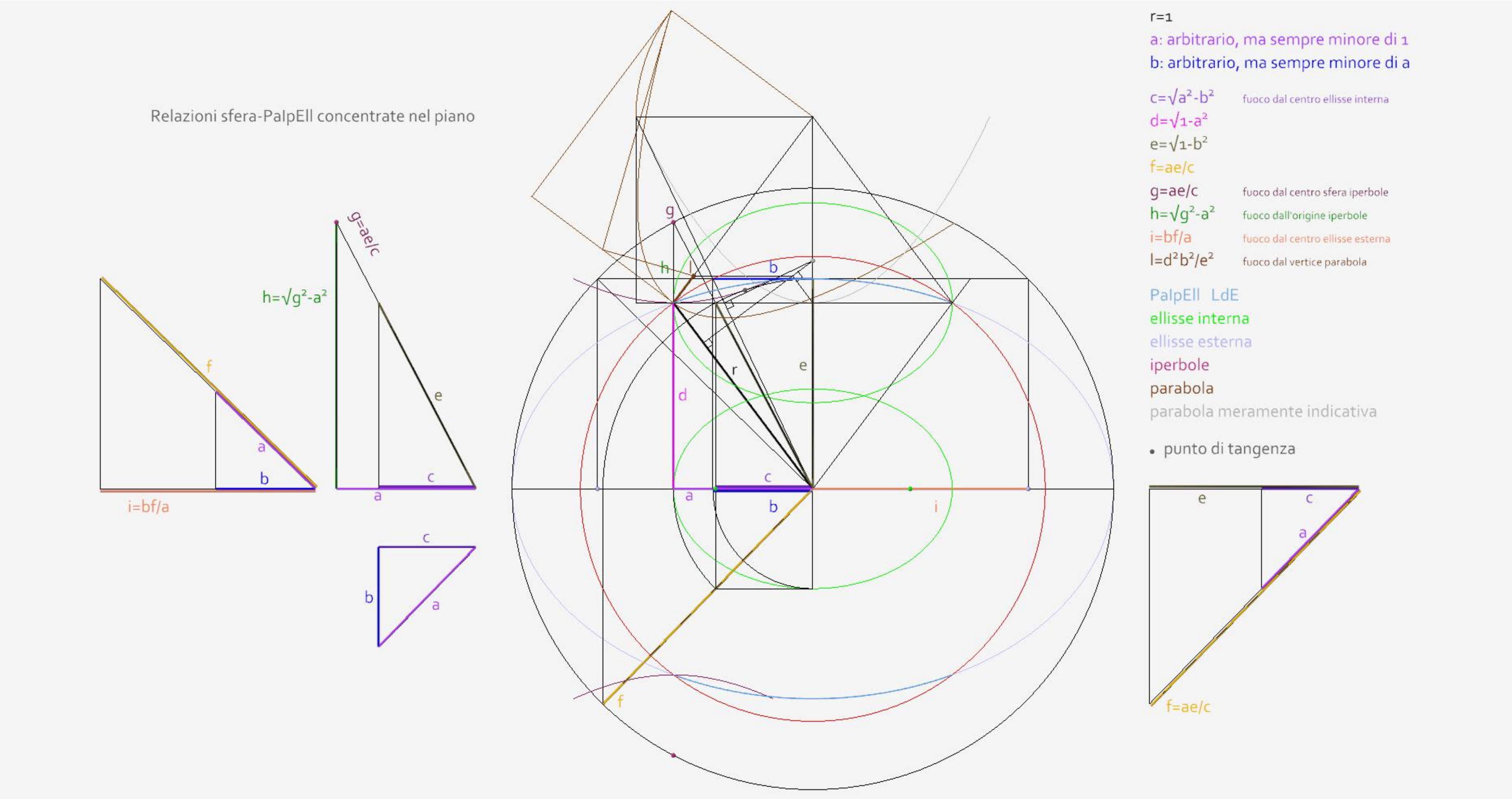


06f2. Portare tutto su un piano.

Con questa vista generale sono identificate le entità geometriche che sviluppano le relazioni portanti alla determinazione di PaIpEll.

Vista generale.

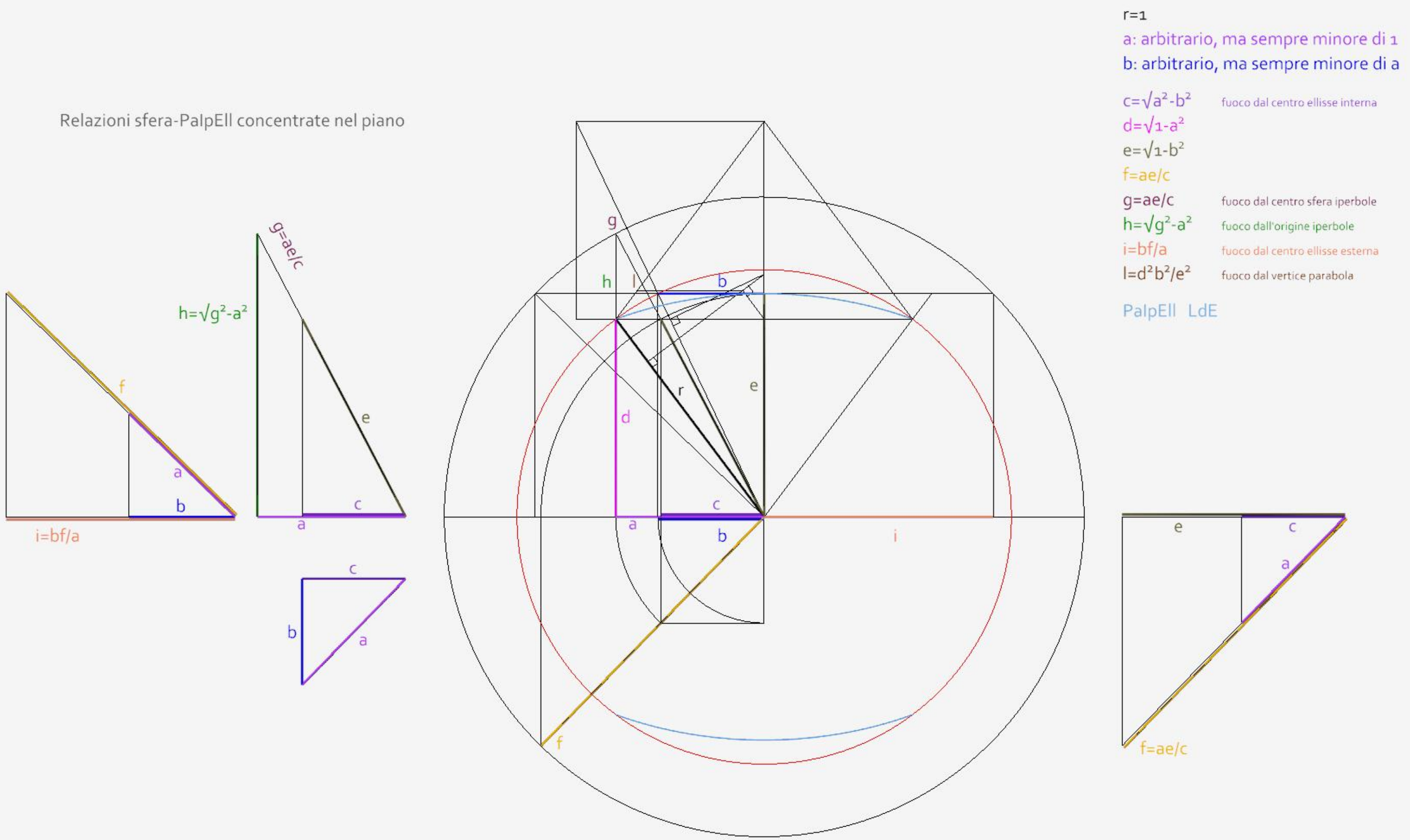
Dal grafico si comprende come tra gli elementi probanti essenziali per la determinazione dei fuochi, indipendentemente dalla determinazione delle coniche, spicchino i teoremi di Pitagora e di Talete. Spicca anche il fatto che per i calcoli sarebbero funzionali i numeri complessi.



06f3. Portare tutto su un piano. Vista generale sintetica.

La presente schematizzazione riduce ai minimi termini i concetti geometrici che stanno alla base di una configurazione di PaIpEll.

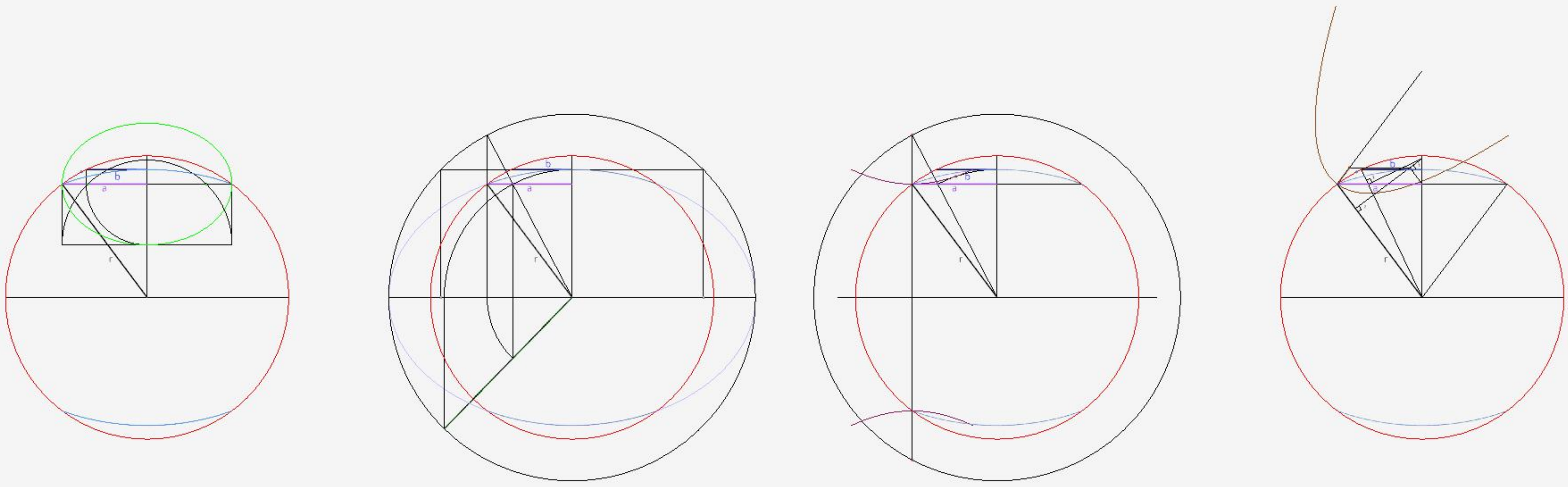
Le tracce delle coniche non sono rappresentate.



06f4. Portare tutto su un piano. Il minimo essenziale, conica per conica.

Al fine di rendere oltremodo semplice e schematica l’operazione di risalita ad una conica sulla base di un determinato PaIpEll, ciascuna operazione ora sarà tratta singolarmente.

Nella tavola sono messe a confronto le quattro distinte operazioni che, a partire da sinistra concernono l’ellisse interna, l’ellisse esterna, l’iperbole e la parabola.



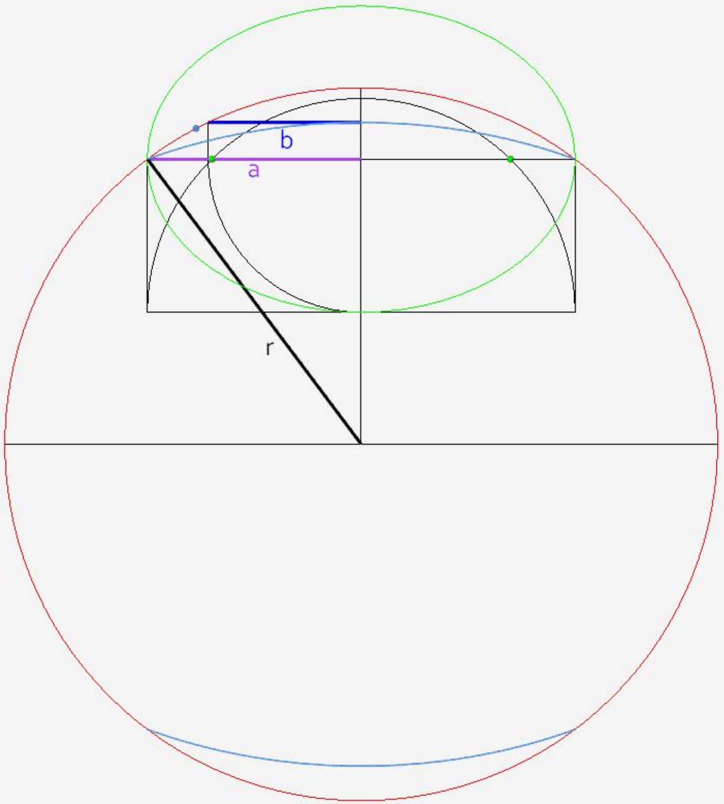
06f5. Portare tutto su un piano.

Le lettere di **a** e **b** rappresentano i due parametri arbitrari stabiliti all'inizio. La lettera **r** rappresenta il raggio unitario.

Il pallino ciano rappresenta uno dei due fuochi di PaIpEll.

Gli archi di ellisse ciano rappresentano PaIpEll in vista frontale.

Il minimo essenziale, per risalire da PaIpEll all'ellisse interna.



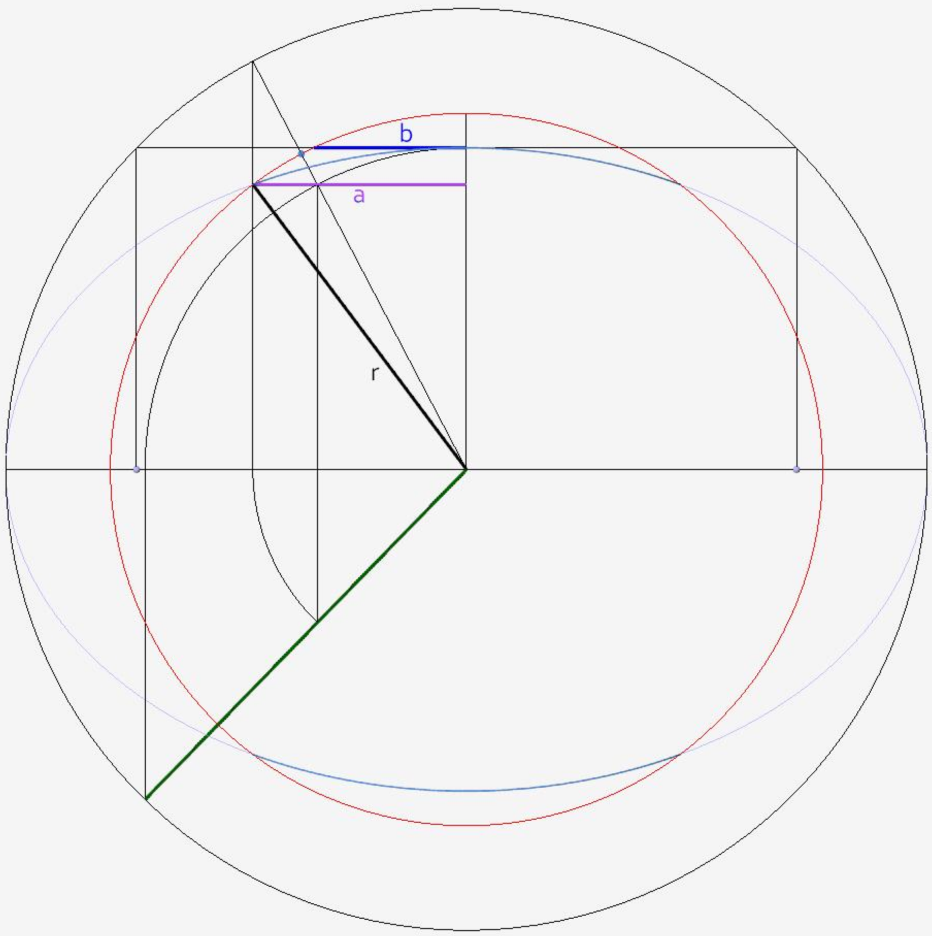
06f6. Portare tutto su un piano.

Le lettere di **a** e **b** rappresentano i due parametri arbitrari stabiliti all'inizio. La lettera **r** rappresenta il raggio unitario.

Il pallino ciano rappresenta uno dei due fuochi di PaIpEll.

Gli archi di ellisse ciano rappresentano PaIpEll in vista frontale.

Il minimo essenziale, per risalire da PaIpEll all'ellisse esterna.



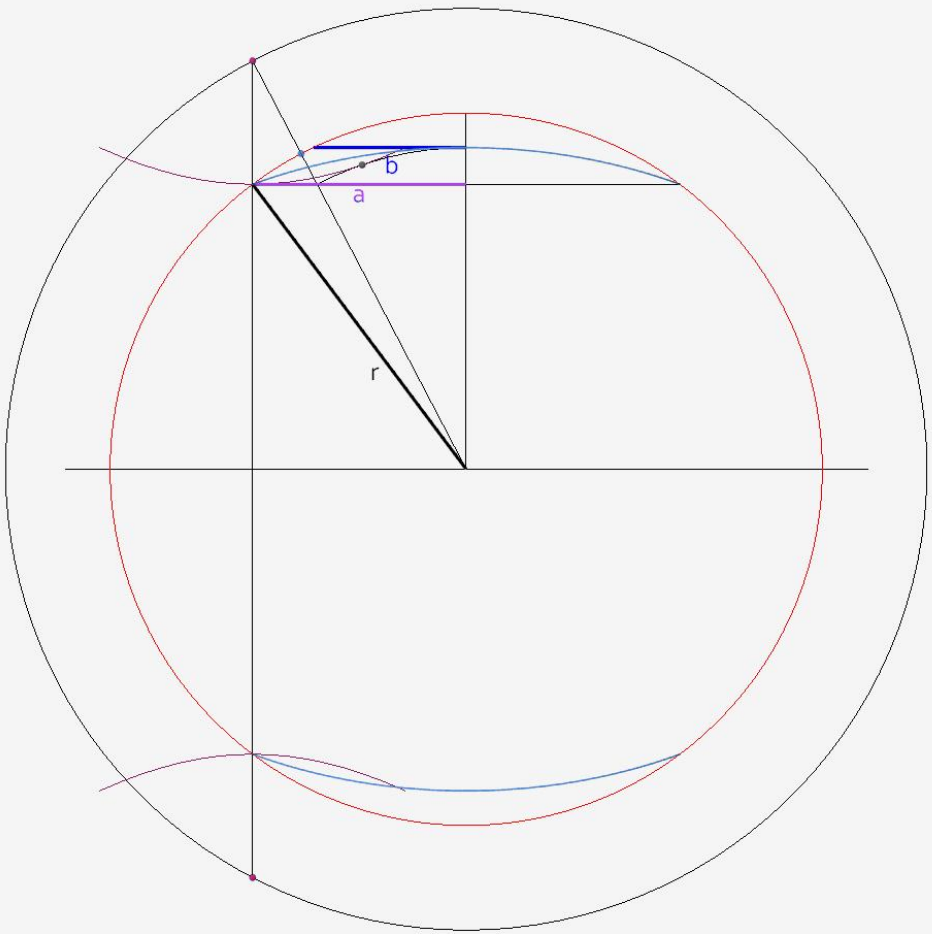
06f7. Portare tutto su un piano.

Le lettere di **a** e **b** rappresentano i due parametri arbitrari stabiliti all'inizio. La lettera **r** rappresenta il raggio unitario.

Il pallino ciano rappresenta uno dei due fuochi di PaIpEll.

Gli archi di ellisse ciano rappresentano PaIpEll in vista frontale.

Il minimo essenziale, per risalire da PaIpEll all'iperbole.



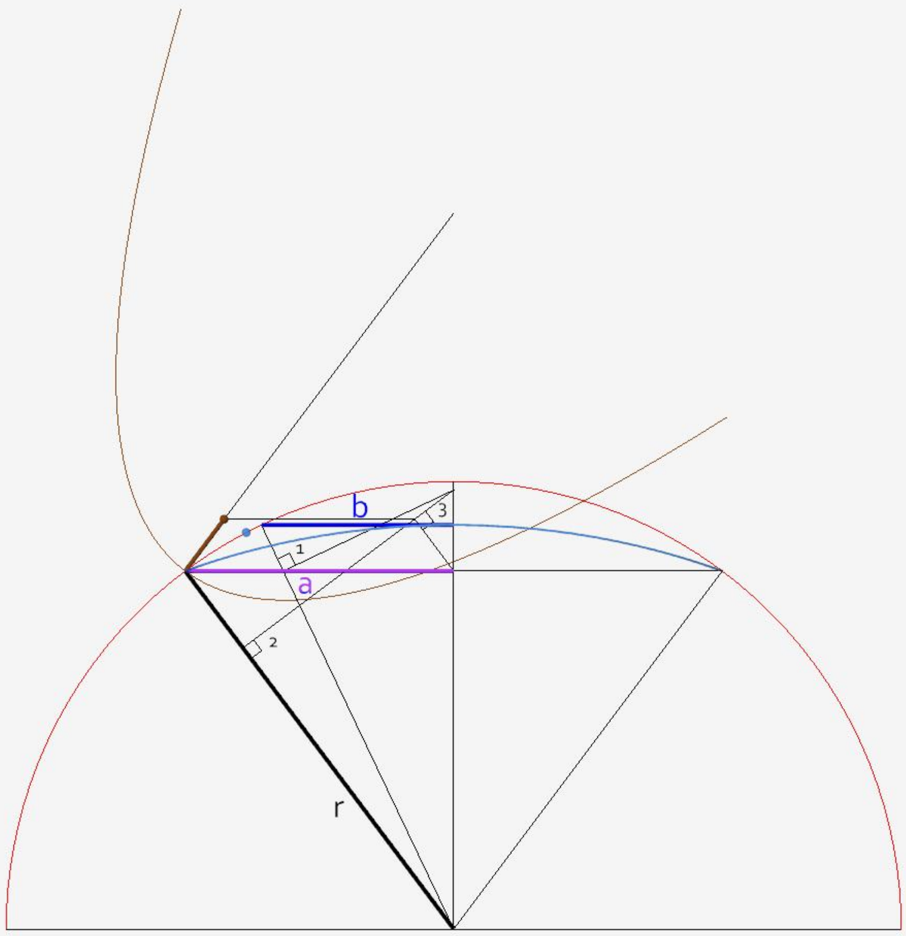
06f8. Portare tutto su un piano.

Le lettere di **a** e **b** rappresentano i due parametri arbitrari stabiliti all'inizio. La lettera **r** rappresenta il raggio unitario.

Il pallino ciano rappresenta uno dei due fuochi di PaIpEll.

Gli archi di ellisse ciano rappresentano PaIpEll in vista frontale.

Il minimo essenziale, per risalire da PaIpEll alla parabola.



07. Serie di cerchi raccordabili mediante un dato PaIpEll.

L'uguaglianza di geodetiche scaturita nelle dimostrazioni evidenzia che PaIpEll costituisce un Luogo di Equidistanza tra cerchi su superficie sferica, compresi casi in cui i cerchi si contraggono in punti.

La sequenza che segue mette in evidenza le relazioni che si vengono a stabilire tra le varie configurazioni di cerchi raccordandi e PaIpEll.

Inoltre, la sequenza mette in evidenza una significativa discordanza rispetto a quanto in proposito si può riscontrare nella geometria del piano. Infatti, nella geometria sferica perde di significato la distinzione tra «esterni» ed «interni» per quanto riguarda cerchi asecanti e cerchi tangenti. È per questa ragione che la sequenza dei casi tipici che seguiranno risulta meno numerosa rispetto a quella degli allegati esemplificativi.

Scorrendo velocemente le diapositive di questa sezione, si produrrà la sensazione di un'animazione, rendendo più vivido il senso delle mutazioni che si vengono a manifestare col variare dei raggi dei cerchi.

Risulteranno anche più chiare le caratteristiche che debbono avere i cerchi appartenenti all'insieme di quelli compatibili con il PaIpEll dato.

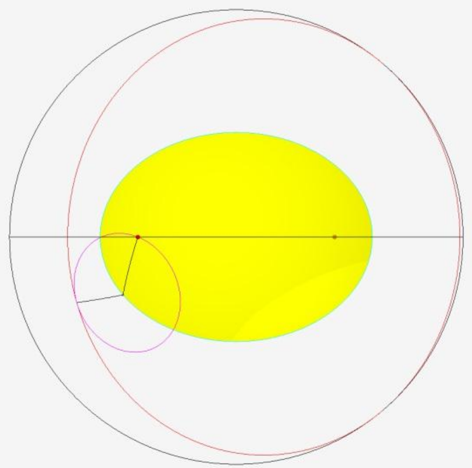
Risultano chiari, in particolare tre aspetti:

- i cerchi secanti tagliano anche PaIpEll;
- i cerchi tangenti sono anche tangenti di PaIpEll;
- i cerchi asecanti non intersecano PaIpEll.

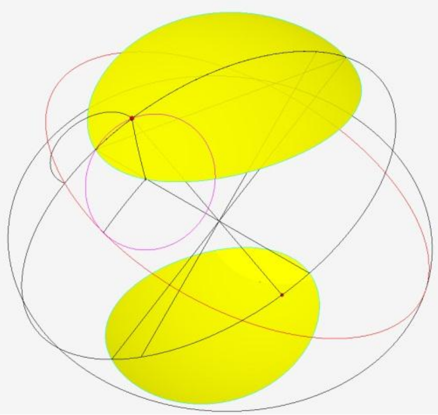
Sequenza di casi tipici:

- Cerchio-Punto (polo A);
- Cerchi asecanti (polo A);
- Cerchi tangenti (polo A);
- Cerchi secanti (polo A);
- Cerchi secanti (raggio uguale);
- Cerchi secanti (polo B);
- Cerchi tangenti (polo B);
- Cerchi asecanti (polo B);
- Cerchio-Punto (polo B).

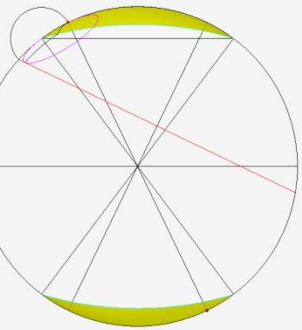
07a. Serie di cerchi raccordabili mediante un dato PaIpEll. Cerchio-Punto (versante polo A).



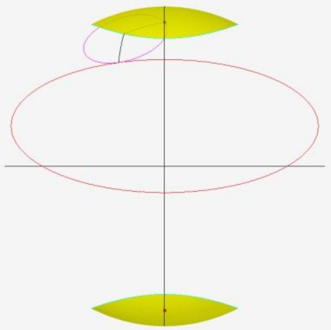
1.



4.



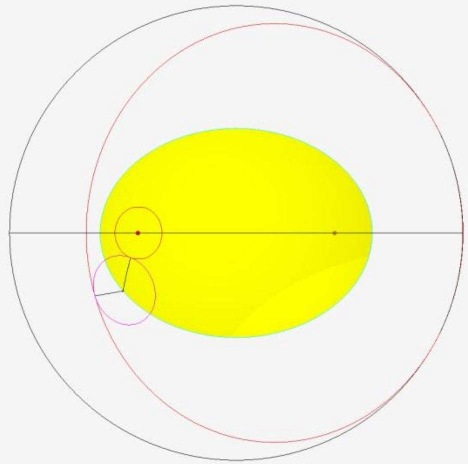
2.



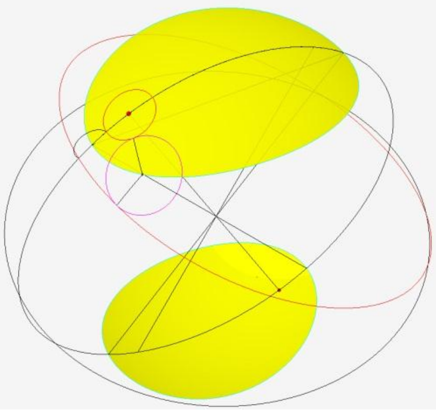
3.

07b. Serie di cerchi raccordabili mediante un dato PaIpEll.

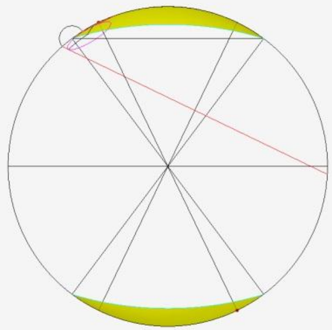
Cerchi asecanti (versante polo A).



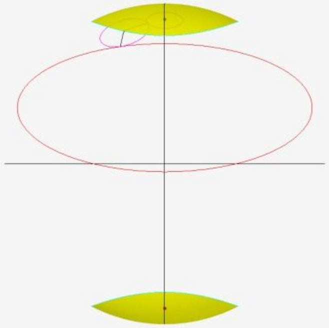
1.



4.



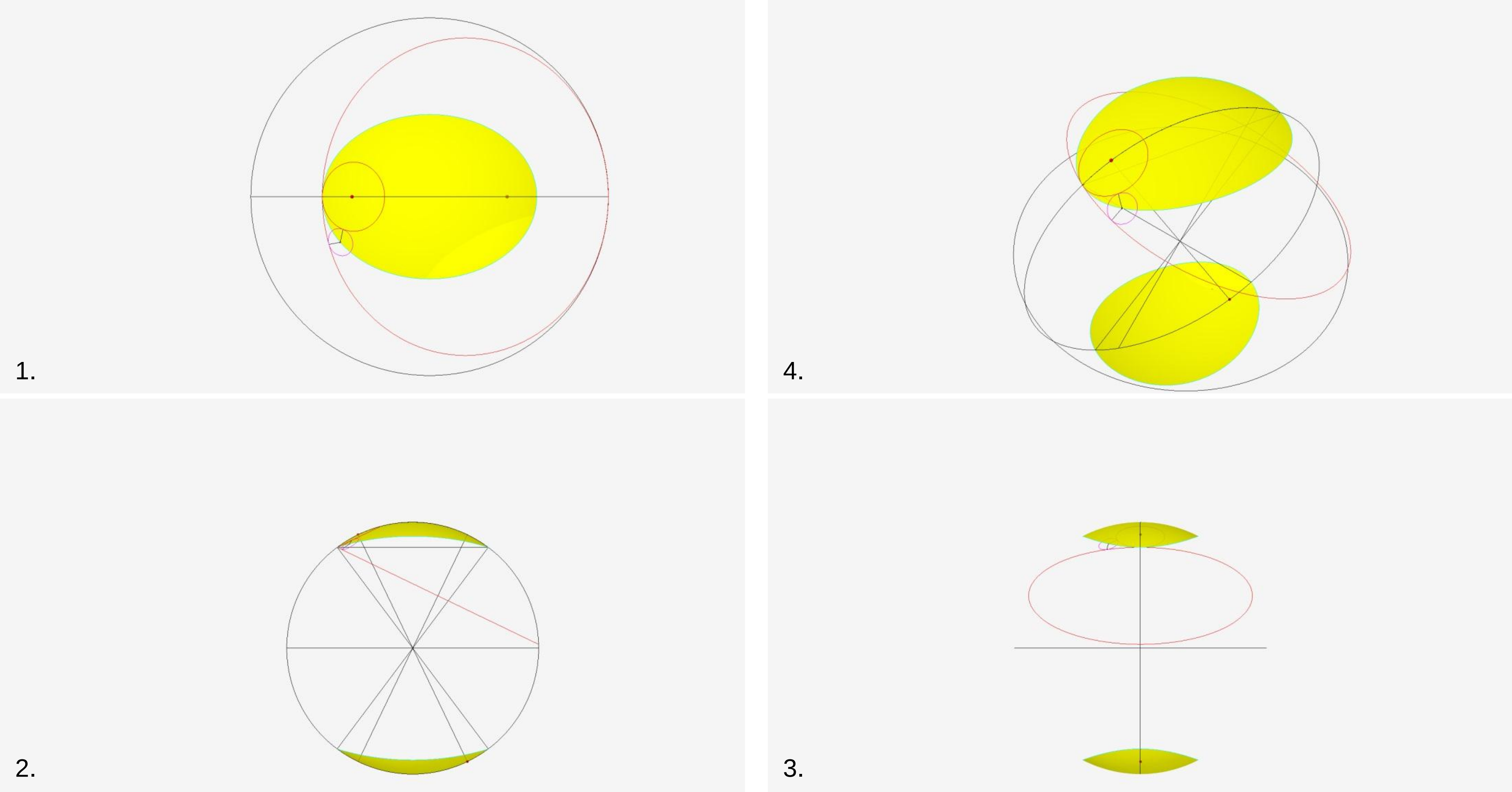
2.



3.

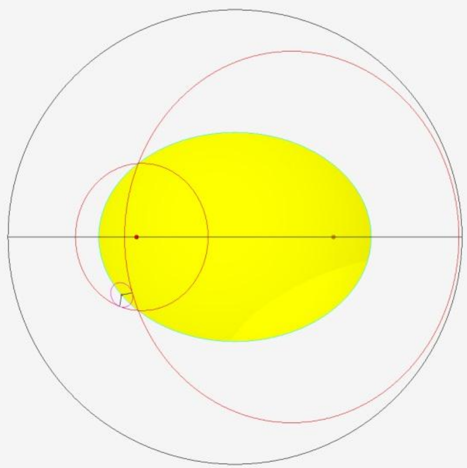
07c. Serie di cerchi raccordabili mediante un dato PalpEll.

Cerchi tangenti (versante polo A).

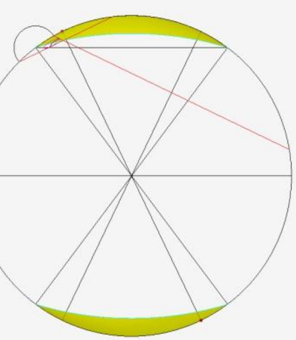


07d. Serie di cerchi raccordabili mediante un dato PalpEll.

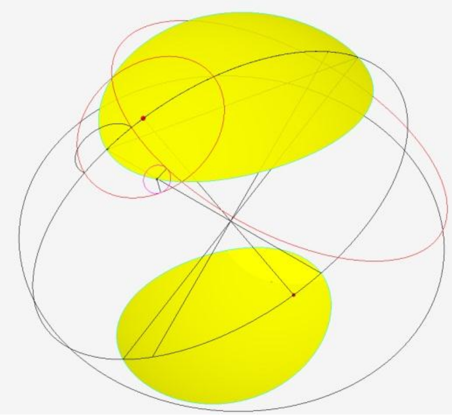
Cerchi secanti (versante polo A).



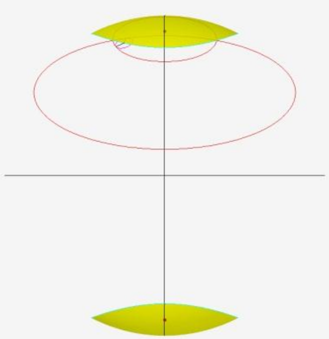
1.



2.



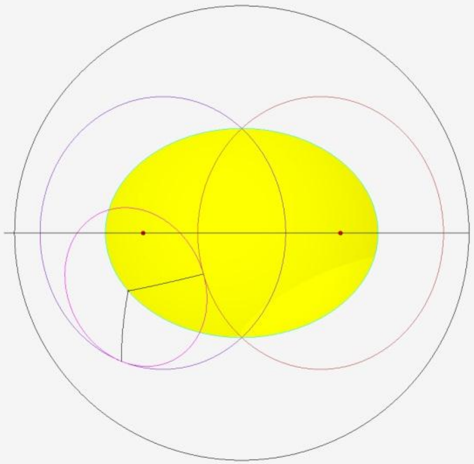
4.



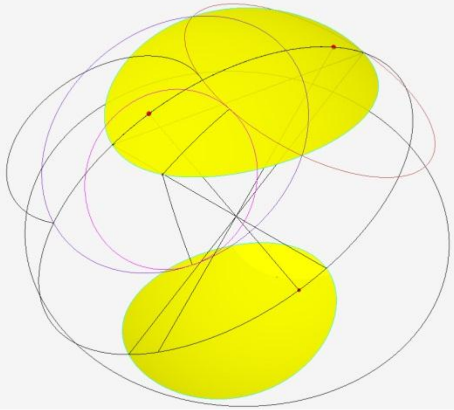
3.

07e. Serie di cerchi raccordabili mediante un dato PalpEll.

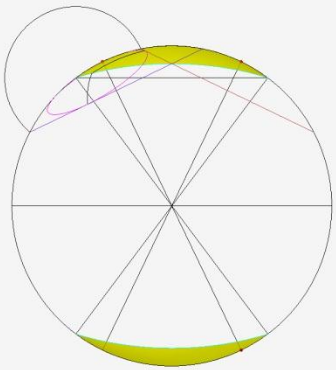
Cerchi secanti (raggio uguale).



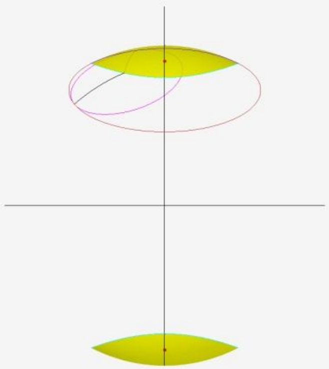
1.



4.



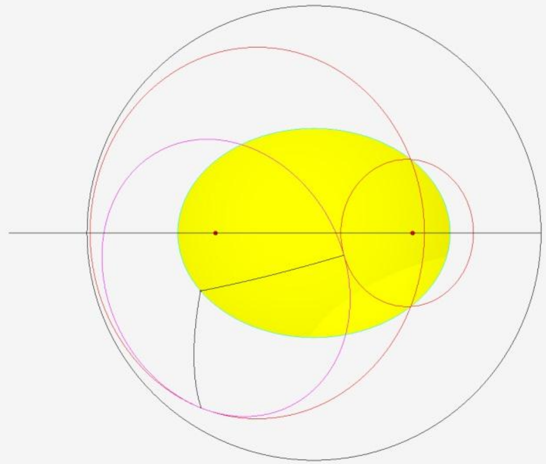
2.



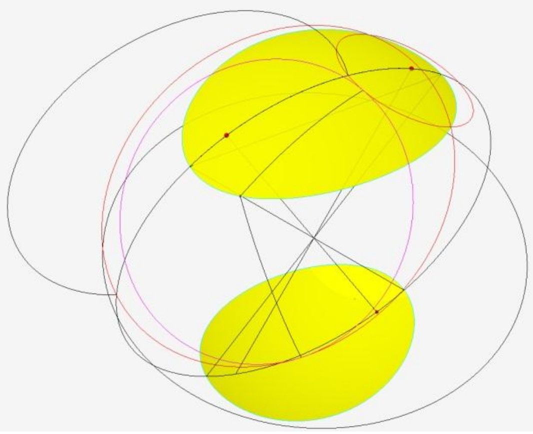
3.

07f. Serie di cerchi raccordabili mediante un dato PaIpEll.

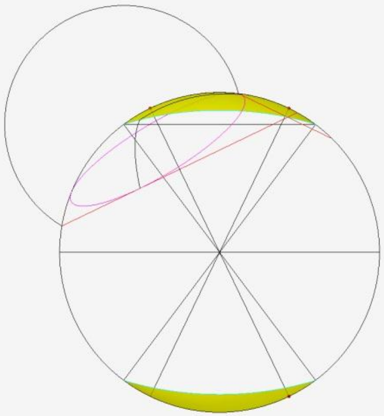
Cerchi secanti (versante polo B).



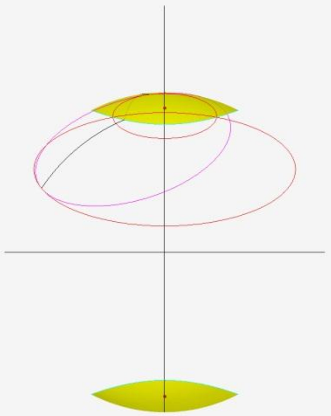
1.



4.



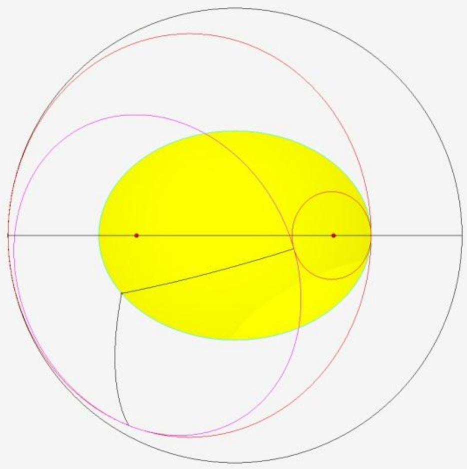
2.



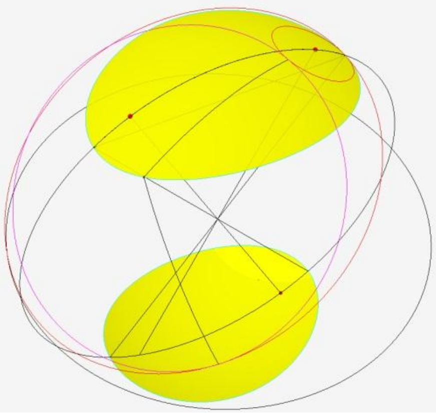
3.

07g. Serie di cerchi raccordabili mediante un dato PalpEll.

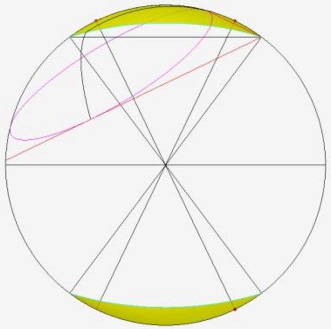
Cerchi tangenti (versante polo B).



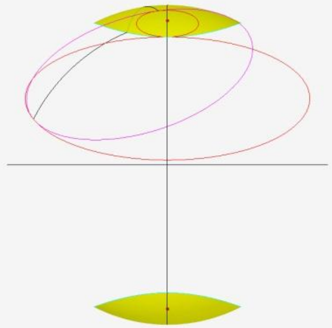
1.



4.



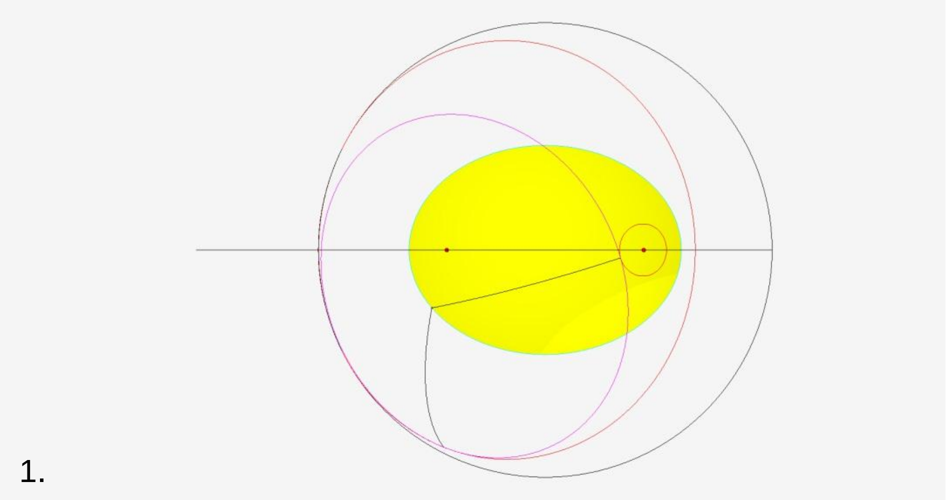
2.

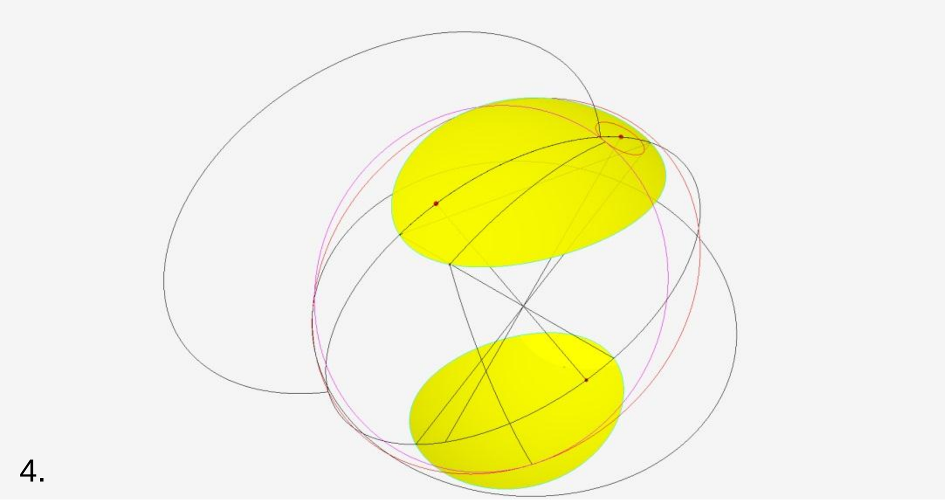


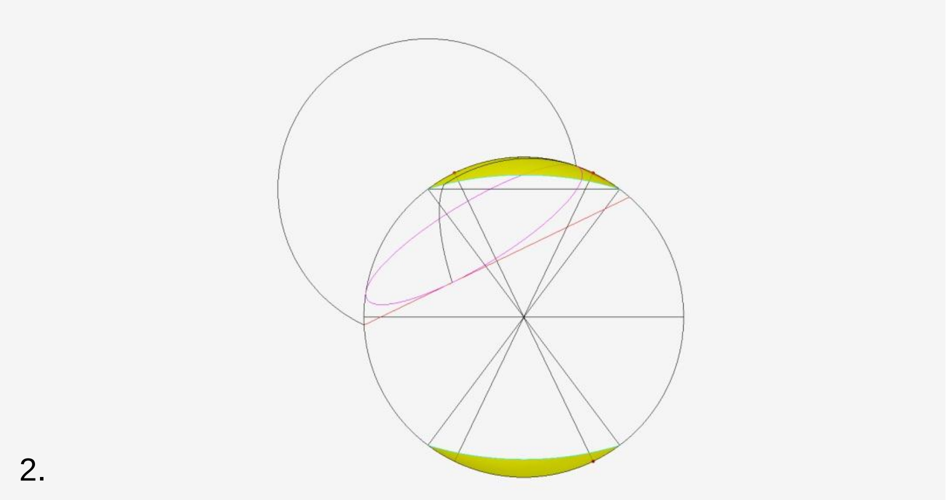
3.

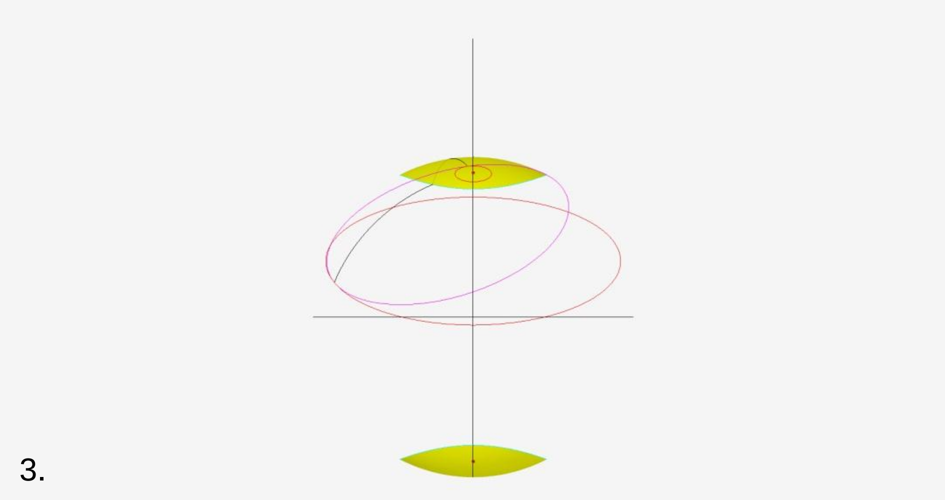
07h. Serie di cerchi raccordabili mediante un dato PalpEll.

Cerchi asecanti (versante polo B).

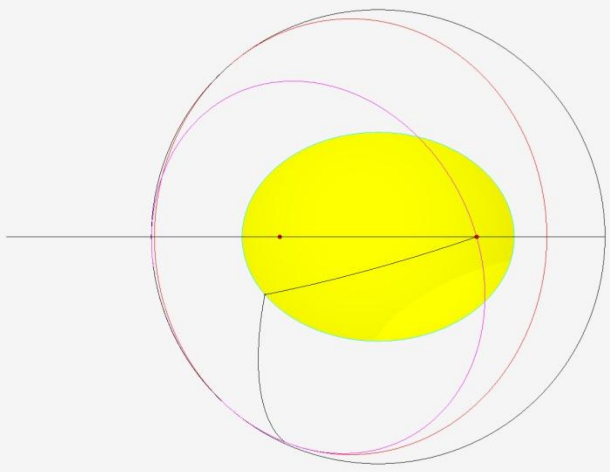

1.


4.

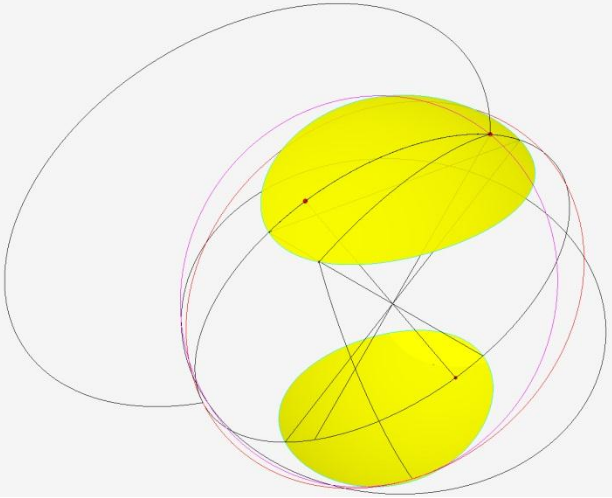

2.


3.

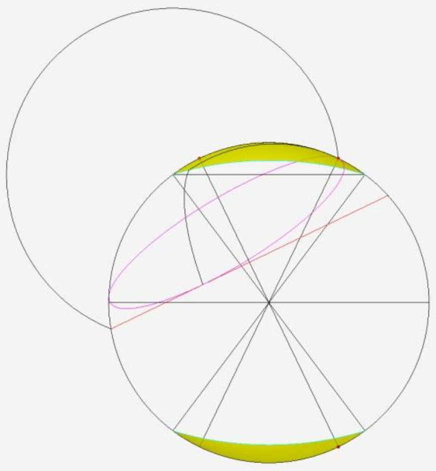
07i. Serie di cerchi raccordabili mediante un dato PalpEll. Cerchio-Punto (versante polo B).



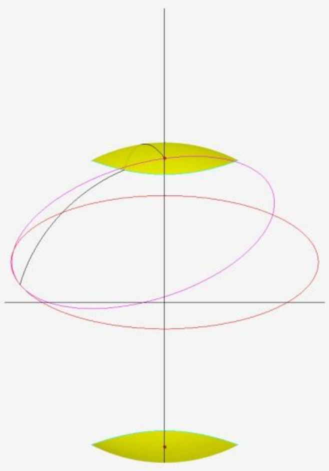
1.



4.



2.



3.

È bello capire, così come il fare. PaIpEll è ora docile anche per l’utile.