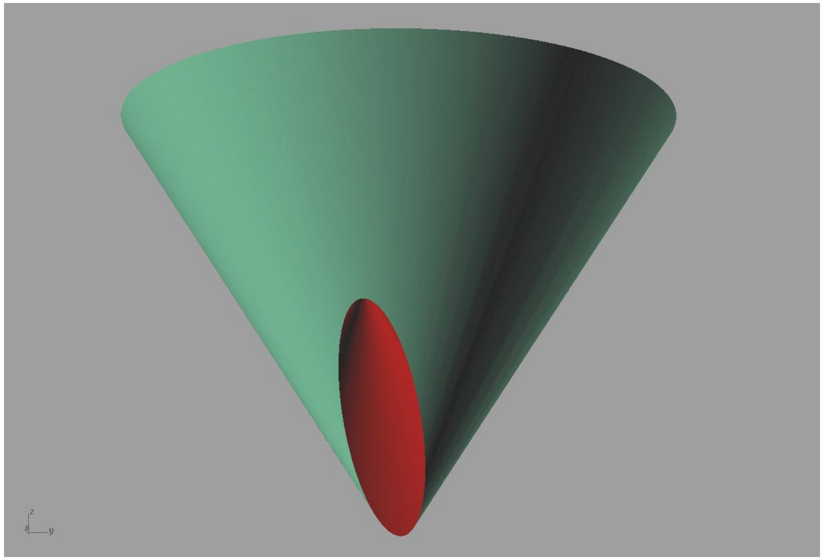
Coniche da coni



Felice Ragazzo

Roma, agosto 2009

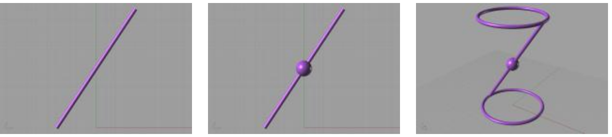
Coniche ottenute mediante intersezioni tra coni.

È generalmente noto che le curve cosiddette coniche derivano dall'intersezione tra cono e piano. Sarà qui illustrata, in forma grafica, una modalità diversa già praticata e generalizzata in campo analitico. Si tratta dell'individuazione di equazioni quadratiche mediante corpi intersecanti. Nel caso particolare, il risultato di ottenere coniche è perseguito facendo ricorso a coni vicendevolmente sezionanti.

Condizione necessaria (qui sperimentata) è che sia il cono sezionando, sia quello sezionatore e viceversa, siano identici, ovvero abbiano le rispettive generatrici ugualmente inclinate. L'identità tra le due figure intersecanti rende priva di significato la gerarchia tra figura sezionanda e figura sezionatrice. Sarebbe pertanto più giusto parlare di gruppo omogeneo di intersezione.

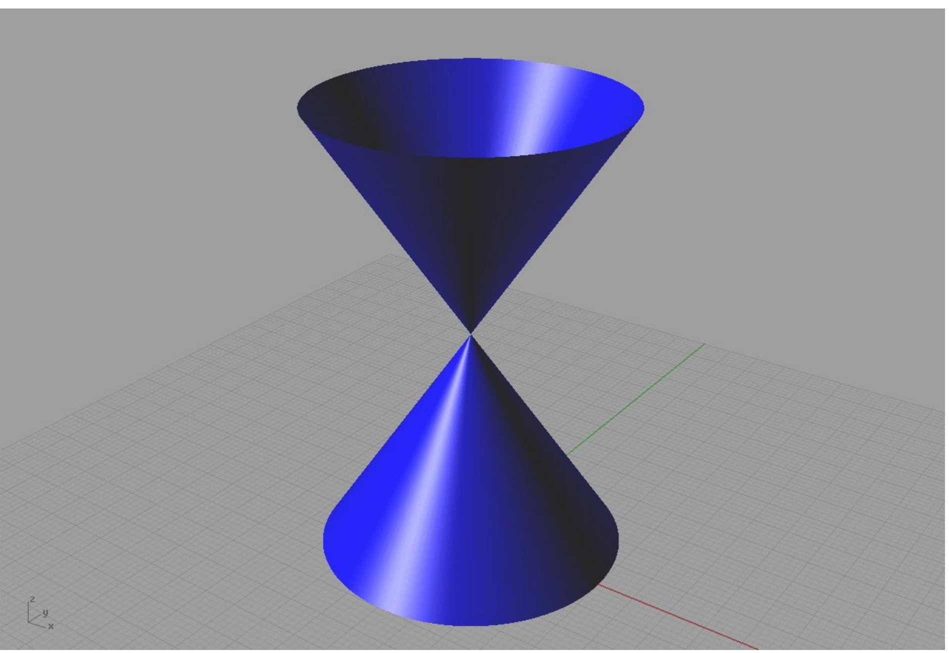
A seconda che si tratti di ellisse, iperbole o parabola, per non parlare dei casi degeneri, occorre che nel gruppo omogeneo di intersezione si rispettino determinate condizione di posizione reciproca tra i coni. Per quanto riguarda la parabola, oltre alla posizione è dirimente l'orientamento.

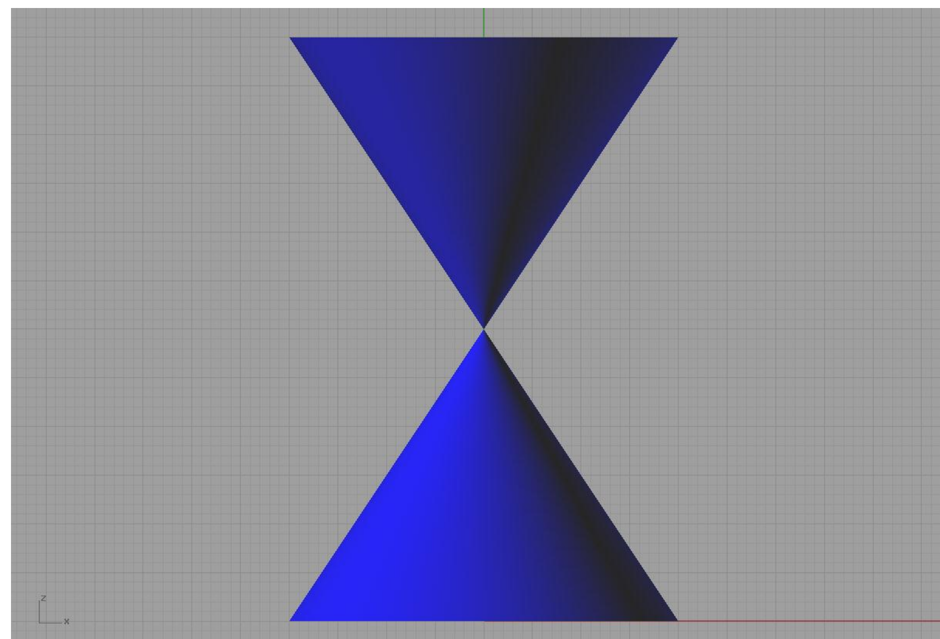
Cono-base.



I parametri del cono-base sono i seguenti:
1. La generatrice è inclinata a piacere;
2. Il vertice è nel suo punto mediano;
3. Gli orli sono cerchi di raggio uguale.

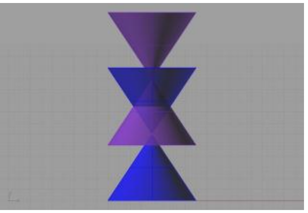
Percorrendo gli orli, la generatrice determina una superficie rigata.

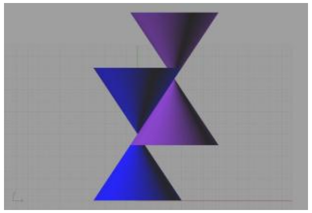




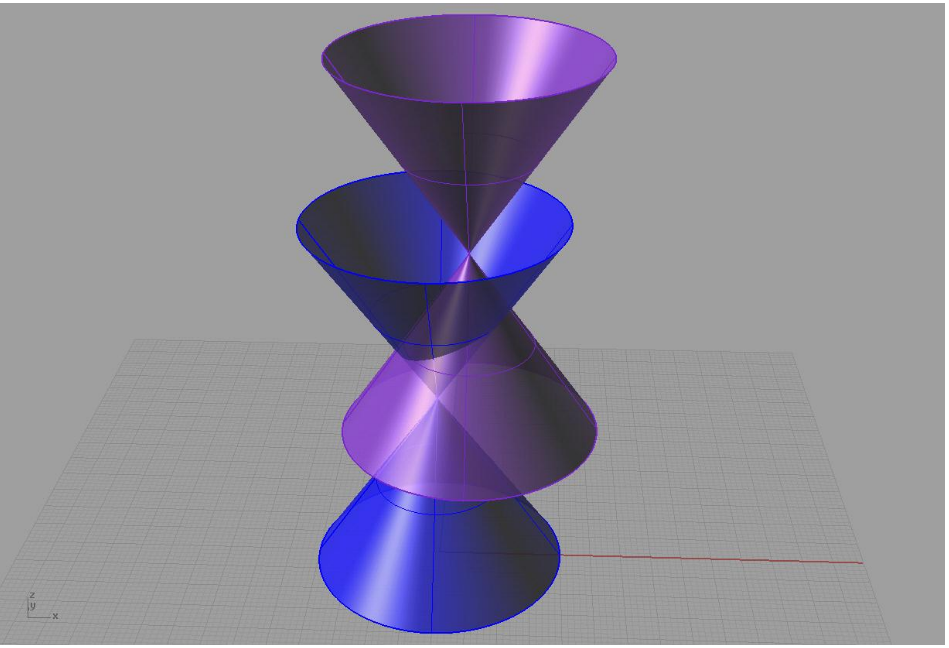
L'intersezione.

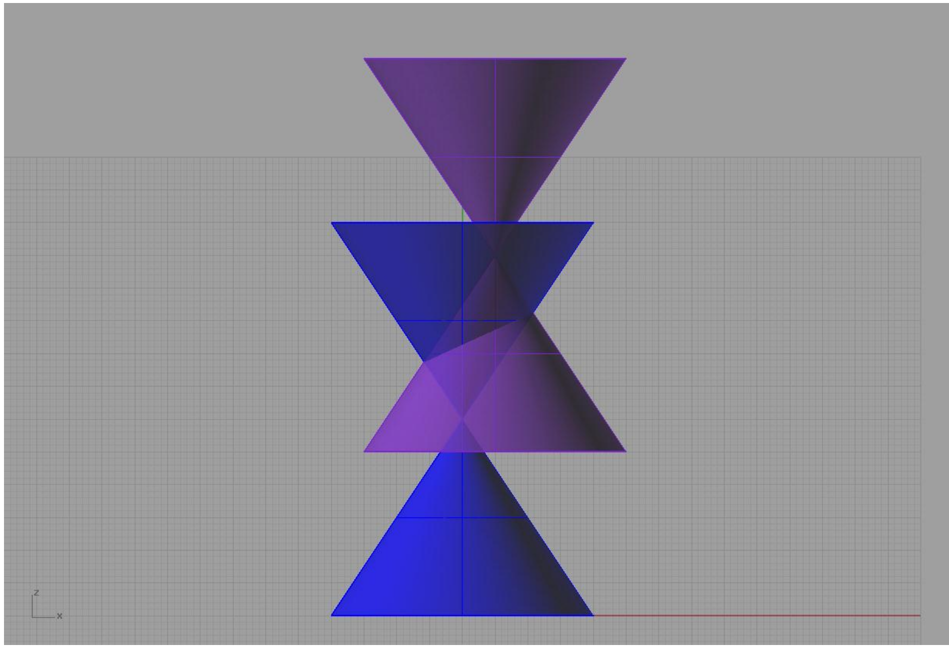
Duplicando il cono-base e dandogli una diversa collocazione, si produce una intersezione.





Se i due coni sono coassiali, si produce un cerchio (conica degenere). Se il vertice di un cono poggia sulla superficie dell'altro e corrispondenti generatrici coincidono, si produce una retta (di nuovo una conica degenere).

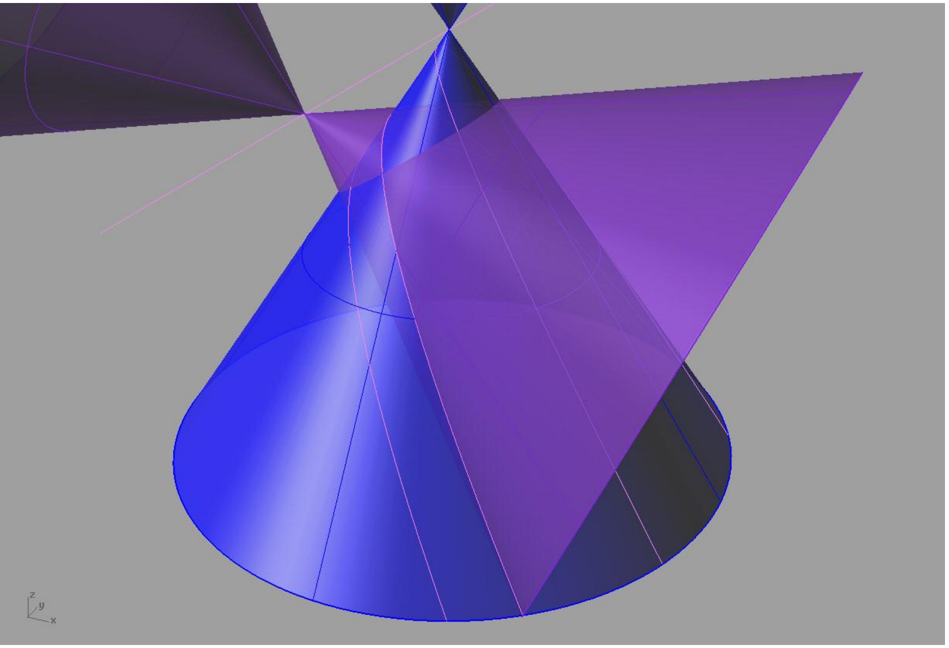


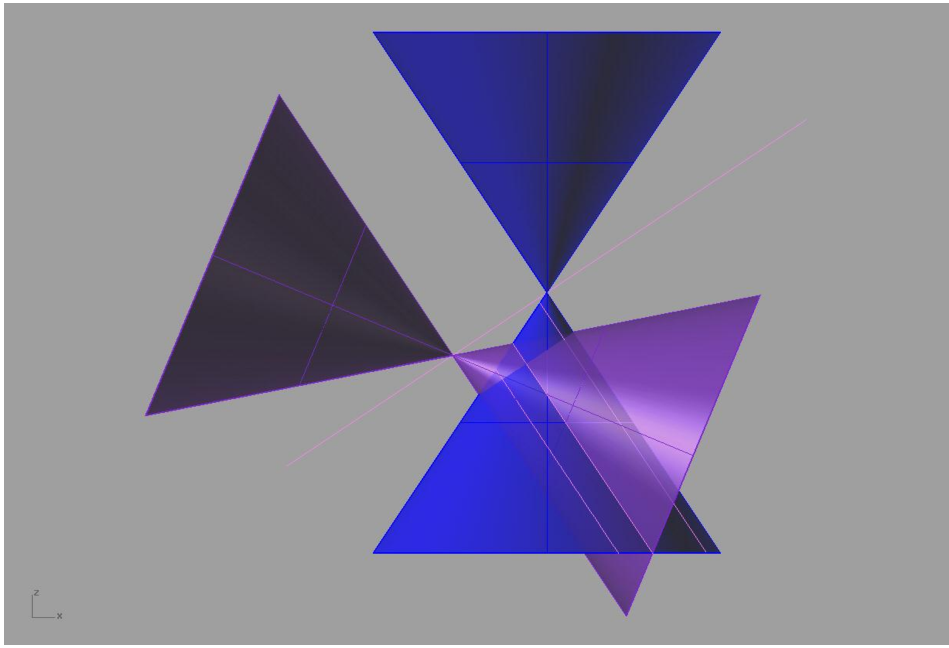


Eccentricità e scala.

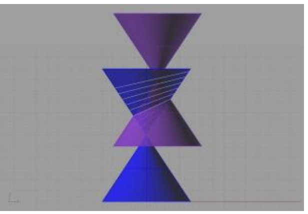
Nella parabola l'eccentricità ha valore 1 (***e*** = 1), nell'ellisse varia da 0 ad 1 (***e*** < 1), nell'iperbole varia da 1 a ∞ (***e*** > 1).

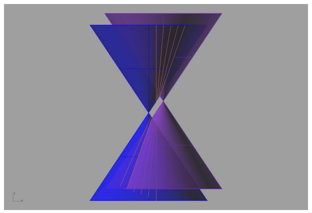
Nella parabola, ogni diversa intersezione comporta la sola variazione del fattore di scala.





Eccentricità e scala.

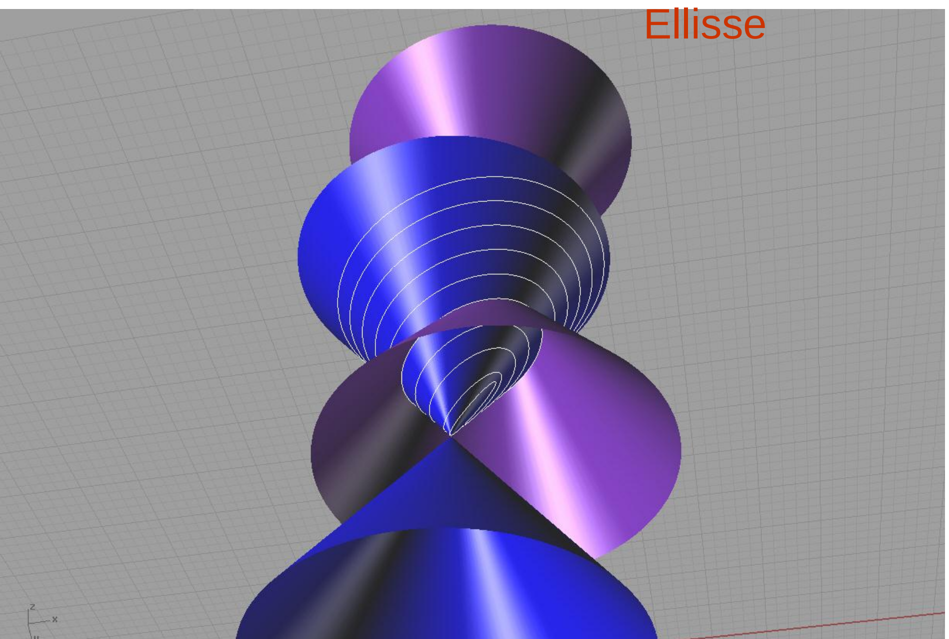




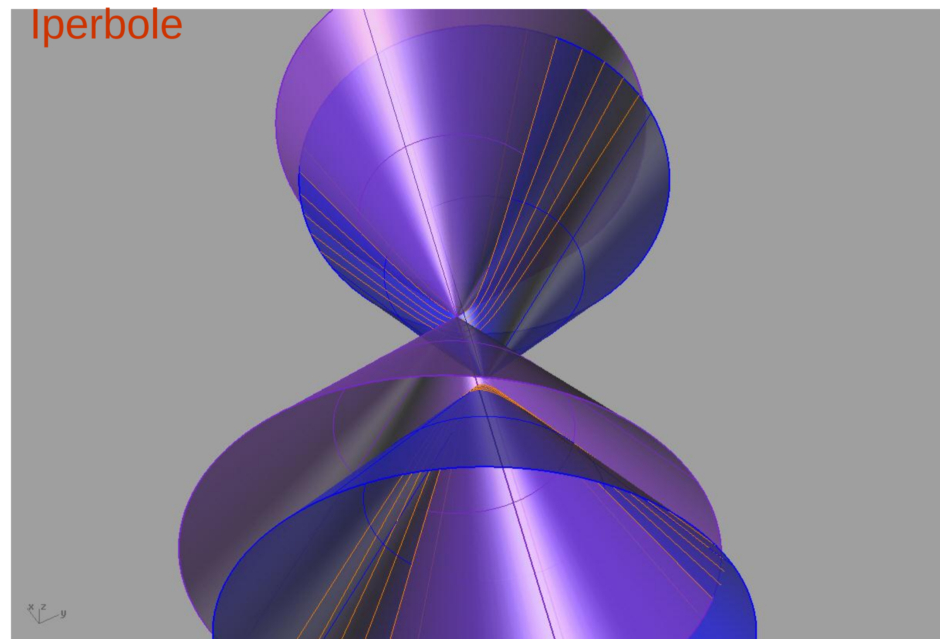
Per quanto riguarda ellisse ed iperbole, invece, ogni tipo di intersezione comporta un'eccentricità ed una scala determinate.

Sia per l'ellisse, sia per l'iperbole, avvicinando od allontanando i vertici nella direzione degli assi, si produrrà un aumento od una riduzione dell'eccentricità; avvicinando od allontanando i vertici nella direzione normale agli assi, si produrrà una riduzione od un amento del fattore di scala.

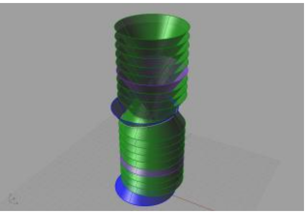
Ellisse

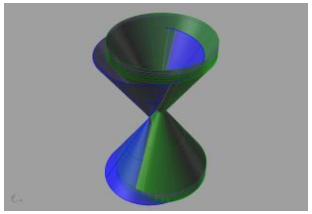


Iperbole



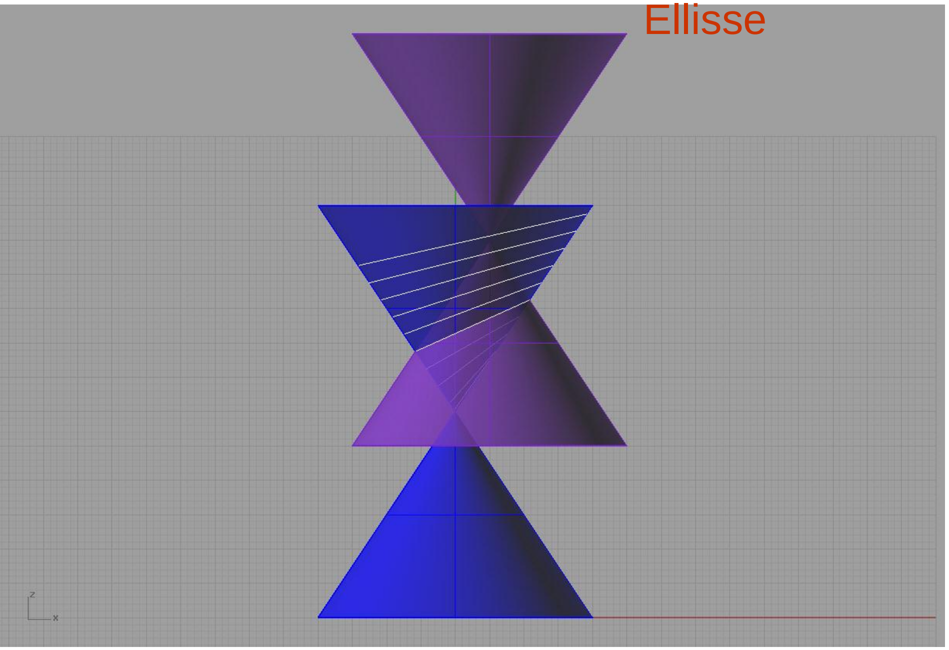
Eccentricità e scala.



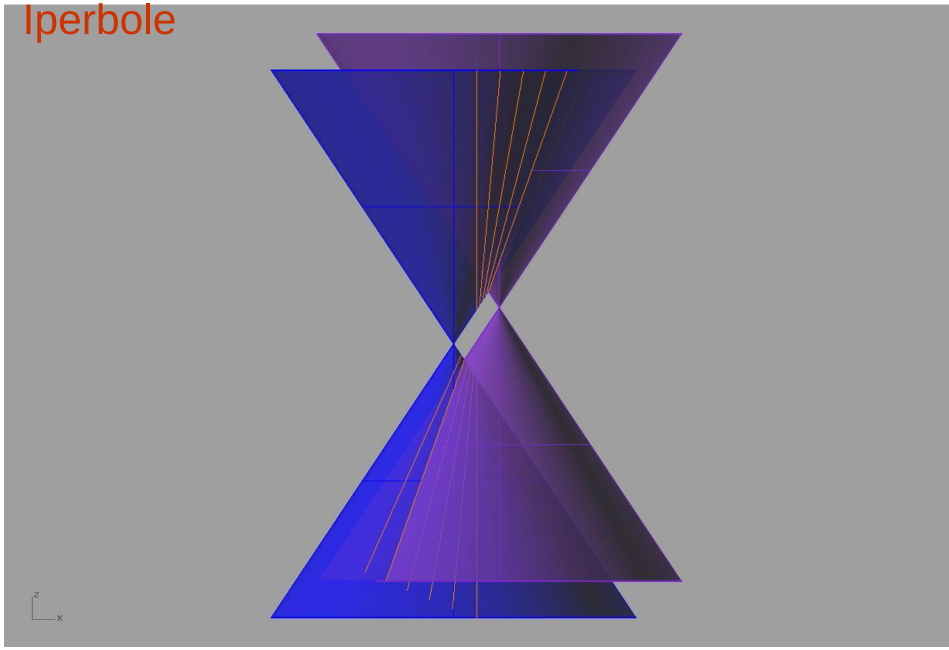


Nel caso dell’ellisse, l’eccentricità tende a 0 quando i coni tendono ad essere coassiali. L’eccentricità invece tende ad 1 quando i vertici si avvicinano alle superfici.

Pure nel caso dell’iperbole l’eccentricità tende a 1 quando i vertici dei coni si avvicinano alle superfici, tende ad ∞ quando si allontanano da queste.

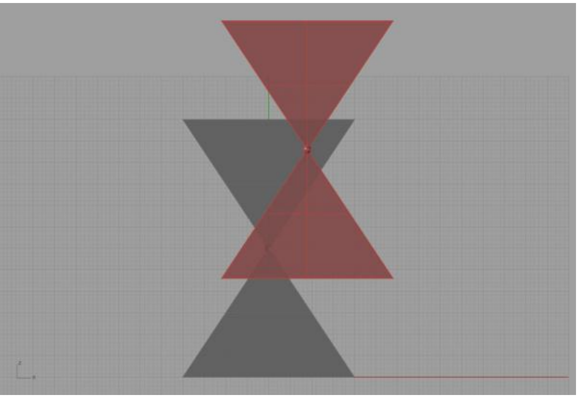


Ellisse



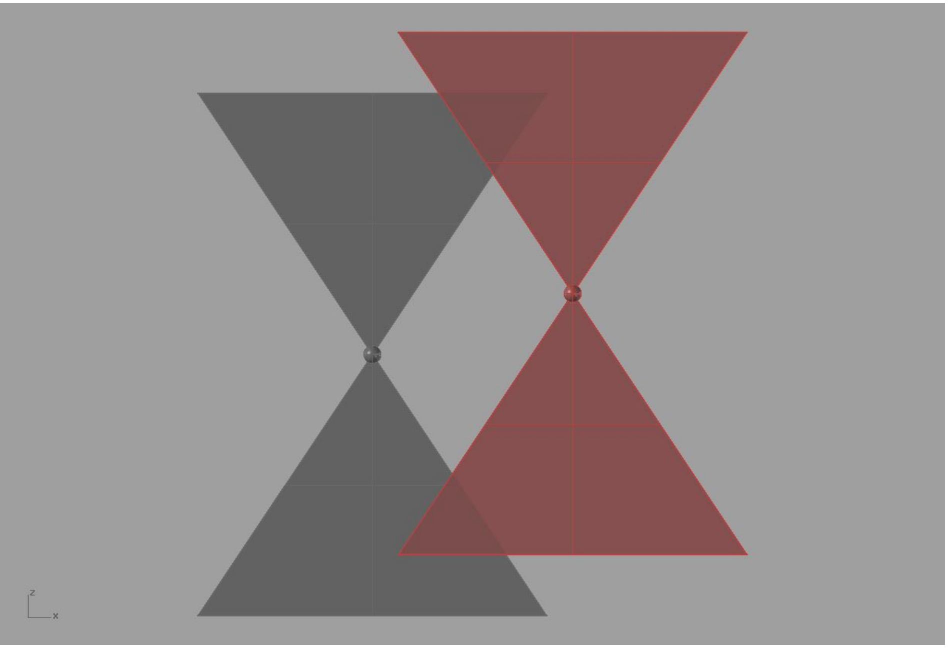
Iperbole

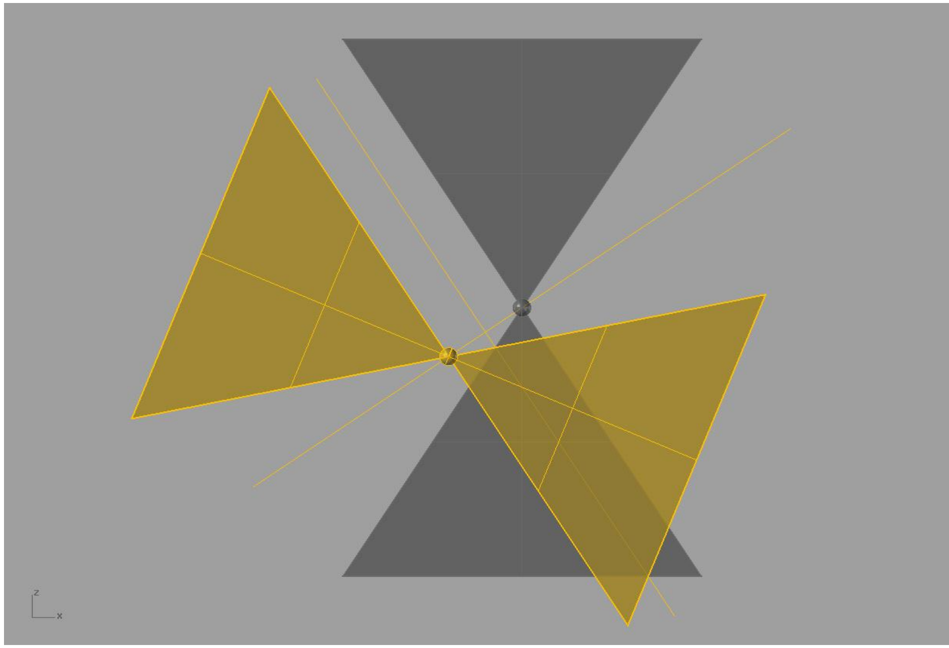
Zone caratteristiche.



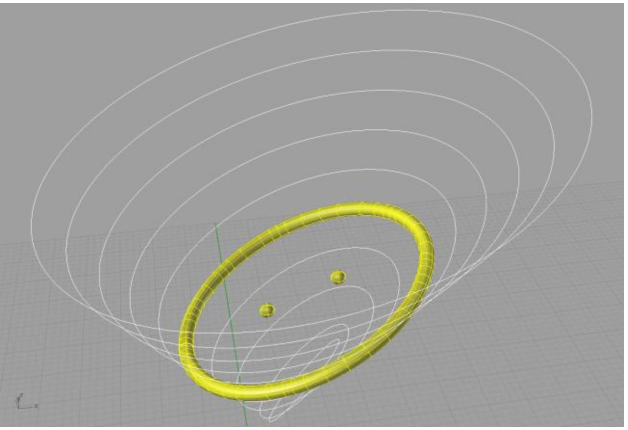
Il posizionamento reciproco dei coni identifica tre eventualità:

1. i vertici dei coni sono interni alle superfici; il risultato dell'intersezione sarà un'**ellisse**;
2. i vertici dei coni sono esterni alle superfici; il risultato dell'intersezione sarà un'**iperbole**;
3. direttrici opposte ed opportunamente allineate nei due coni formano rette parallele; il risultato dell'intersezione sarà una **parabola**.

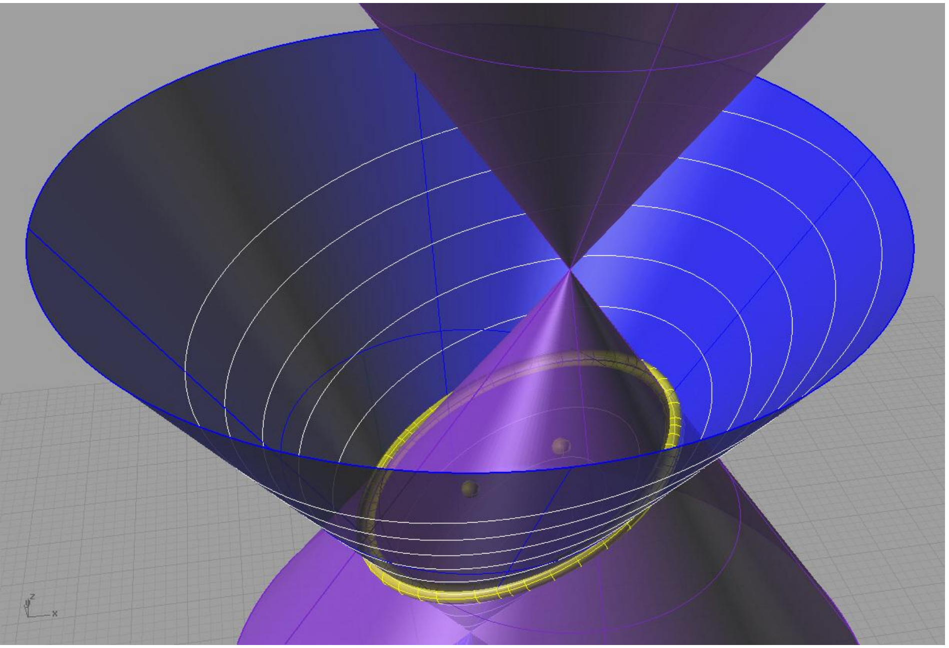


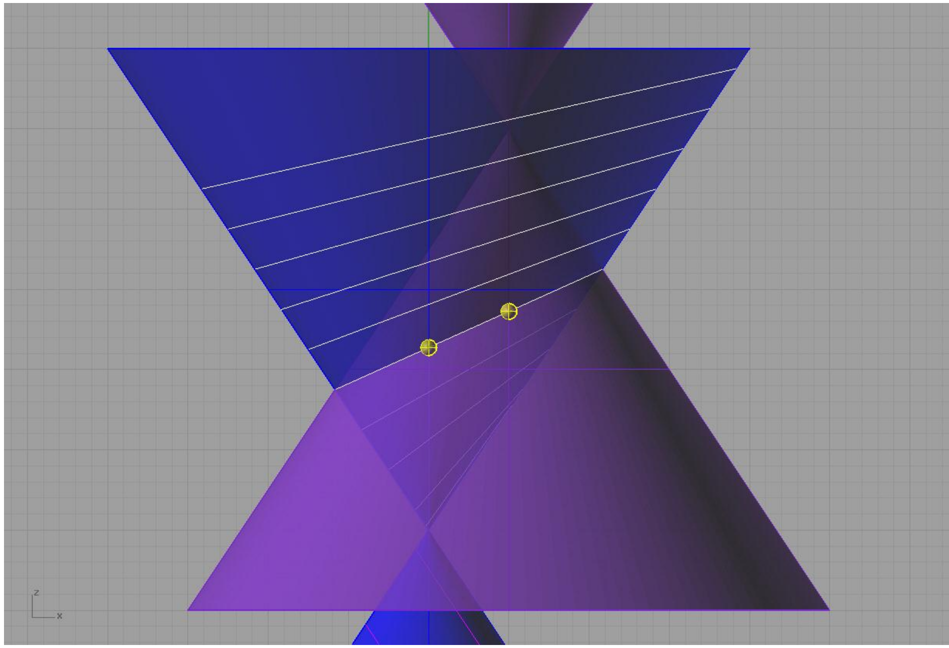


L'ellisse.



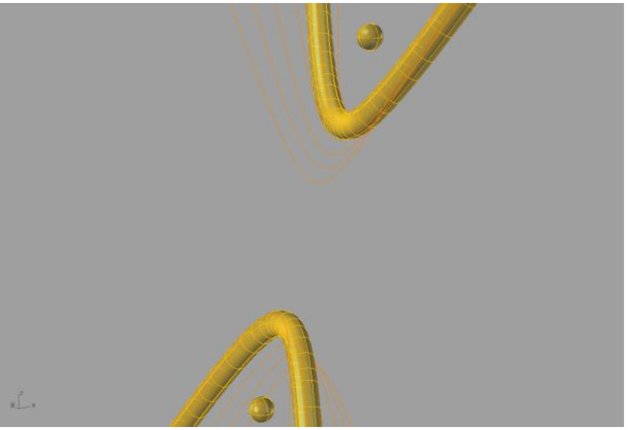
I vertici dei coni sono **interni** alle superfici, pertanto l'intersezione dà luogo ad un'ellisse. Il piano su cui giace è obliquo rispetto alla direzione degli assi.
Per ogni ellisse (data la distanza tra assi) sussiste una specifica inclinazione. L'intervallo delle inclinazioni è compreso tra la generatrice e la normale agli assi; intervallo i cui estremi danno luogo a due coniche degeneri: una retta e un cerchio.
La posizione dei fuochi non coincide con l'intersezione tra piano dell'ellisse e assi dei coni.



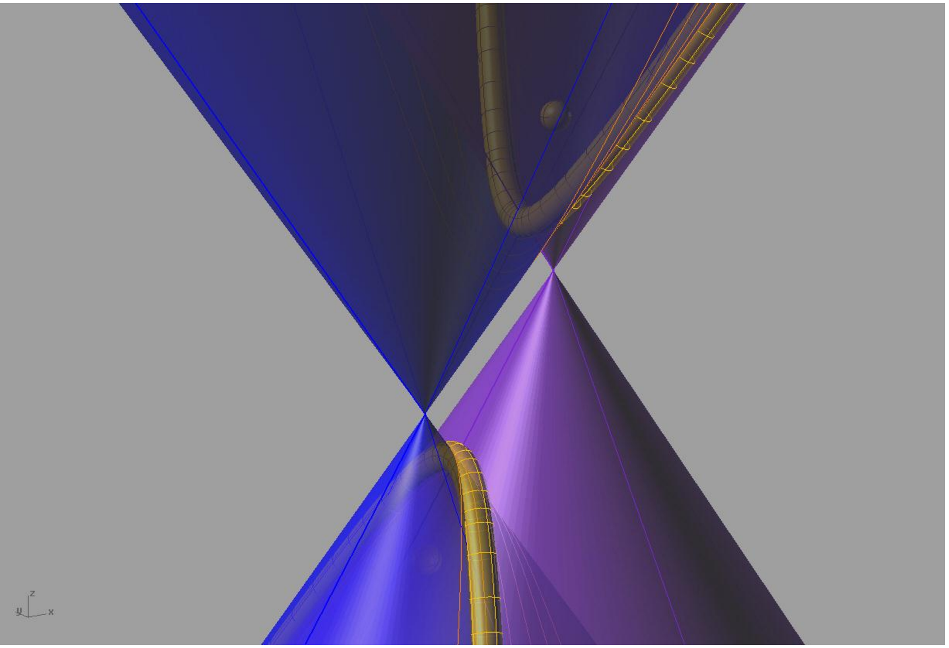


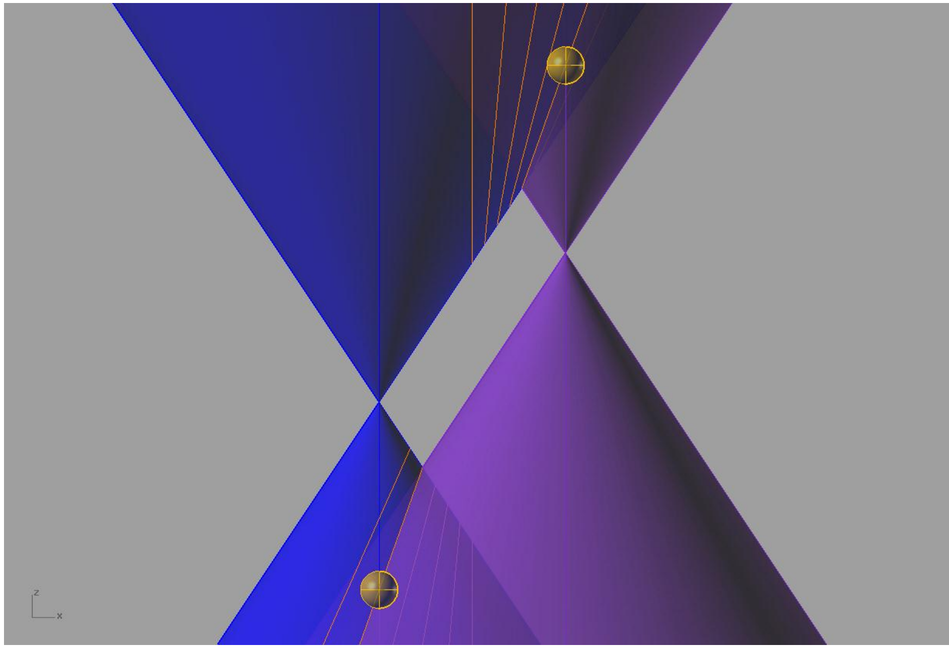
Qui i punti non sono fuochi; saranno tali (lungo gli assi) soltanto quando la conica sarà proiettata su di un piano normale agli assi stessi

L’iperbole.



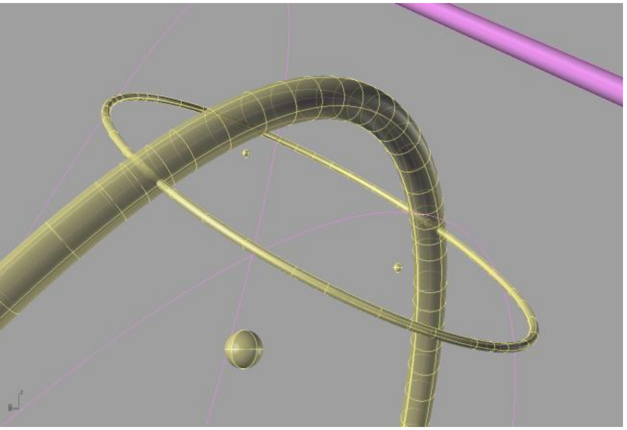
I vertici dei coni sono **esterni** alle superfici, pertanto l’intersezione dà luogo ad un’iperbole. Il piano su cui giace è obliquo rispetto alla direzione degli assi. Per ogni iperbole (data la distanza tra assi) sussiste una specifica inclinazione. L’intervallo è compreso tra la generatrice e la direzione degli assi; intervallo i cui estremi danno luogo a due coniche: una degenere (retta) e una di massima eccentricità (vertici dei coni allineati secondo la normale agli assi). La posizione dei fuochi non coincide con l’intersezione tra piano dell’iperbole e assi dei coni.



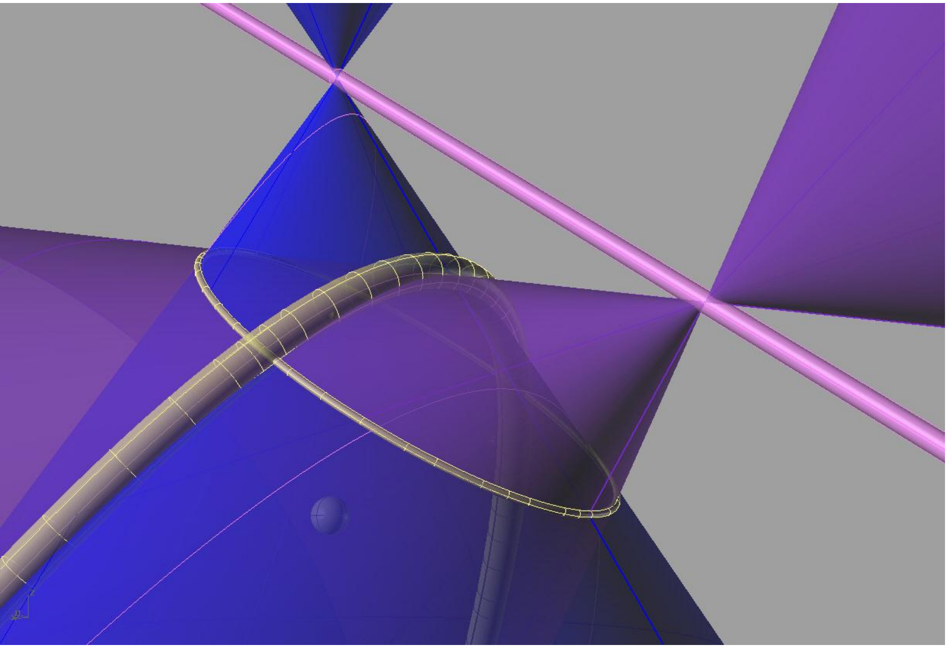


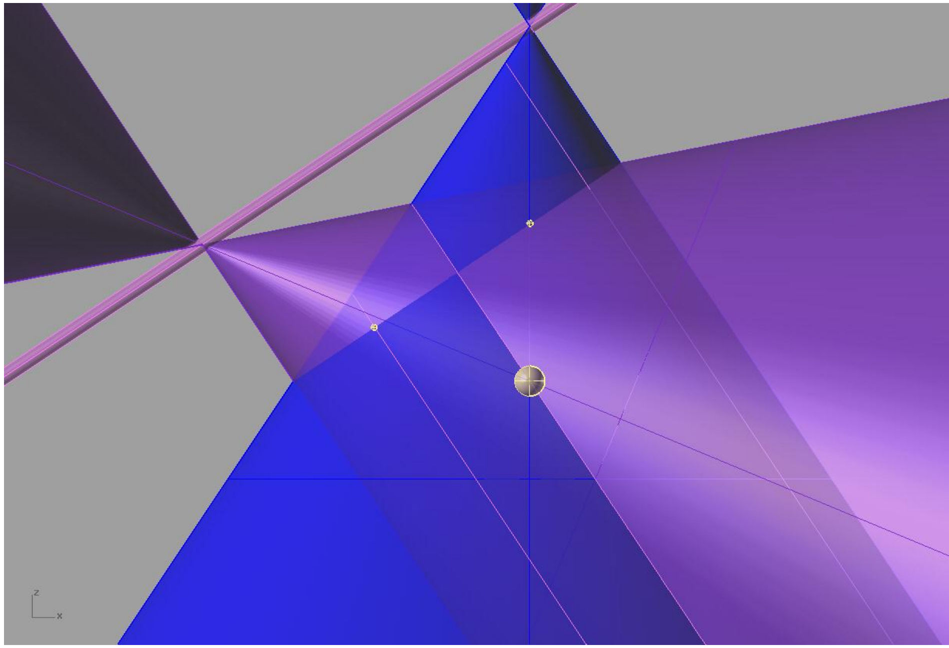
Qui i punti non sono fuochi; saranno tali (lungo gli assi) soltanto quando la conica sarà proiettata su di un piano normale agli assi stessi

La parabola.



Due rispettive generatrici risultano **parallele**, i vertici sono allineati secondo la normale alla direzione di esse, l’intersezione dà luogo ad una parabola; l’intersezione dà luogo anche ad un’ellisse orientata in modo normale a questa.
Ogni parabola (ed ogni ellisse) giaceranno su piani rispettivamente paralleli. La posizione del fuoco della parabola non coincide con l’incrocio degli assi dei coni; la posizione dei fuochi dell’ellisse non coincide con l’intersezione degli assi dei coni con il piano su cui essa giace.





Qui i punti non sono fuochi; saranno tali (lungo gli assi) soltanto quando la conica sarà proiettata su di un piano normale agli assi stessi

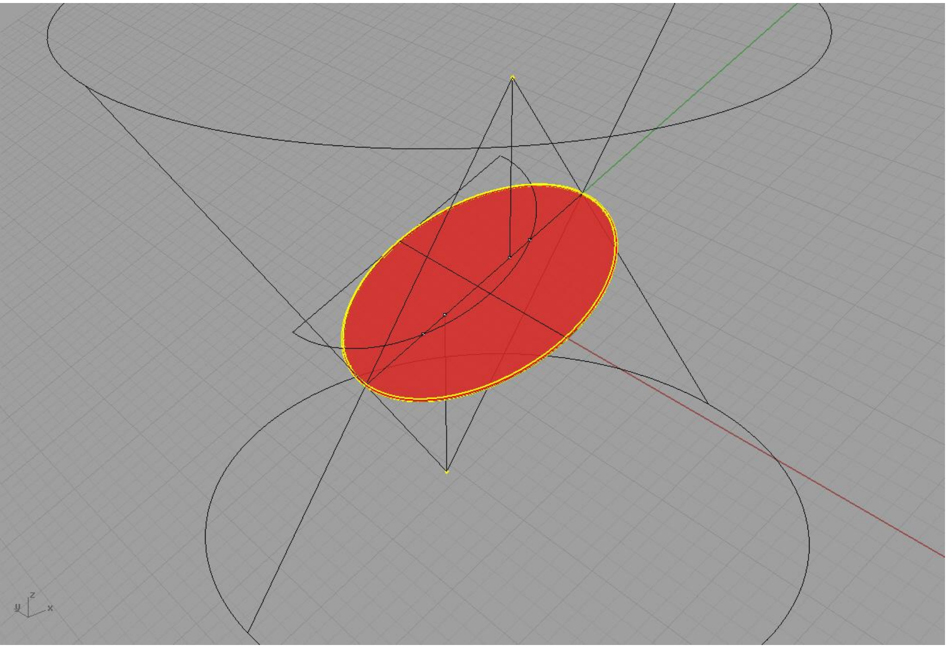
Supporti dimostrativi: ellisse.

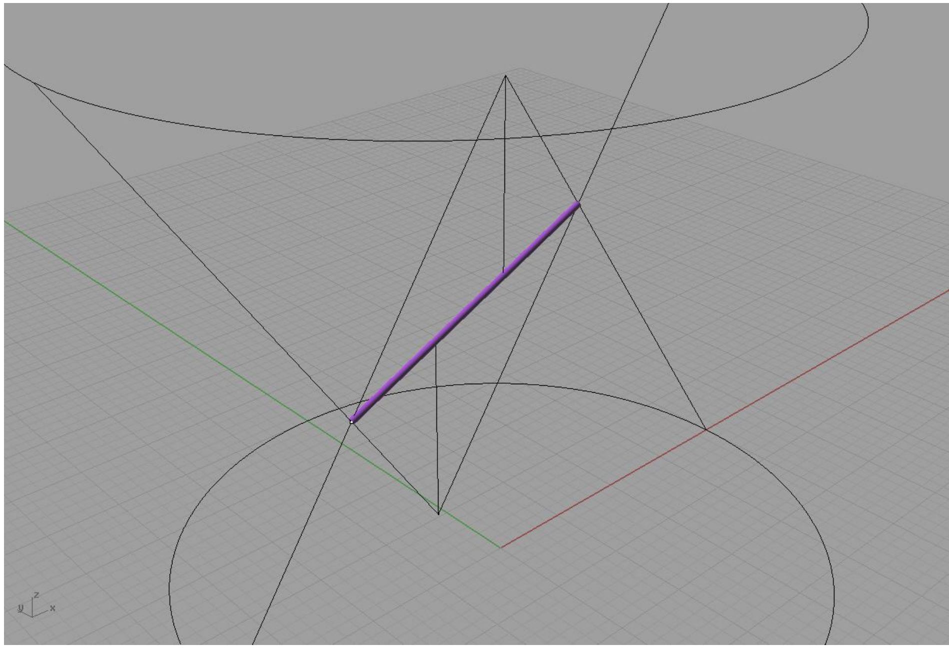
Ipotesi.

L’intersezione tra due coni uguali, sfalsati e ad assi paralleli, aventi i vertici interni alle superfici, dà luogo ad una rosa di punti complanari di forma ellittica.

Tesi.

1. Tracciamo un segmento tra i punti di reciproca intersezione dei coni, aventi in comune il piano di appartenenza degli assi.

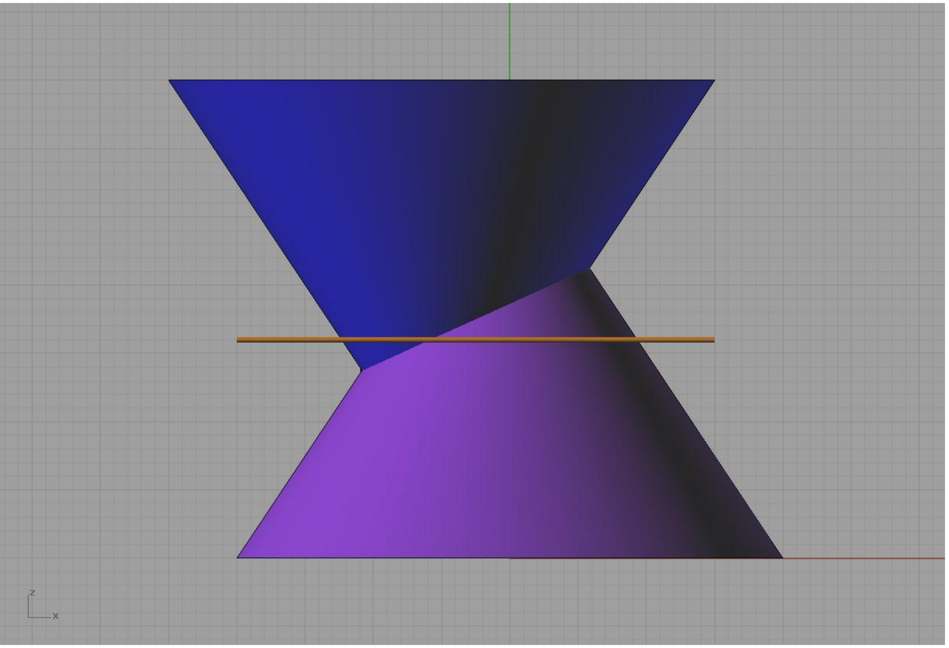


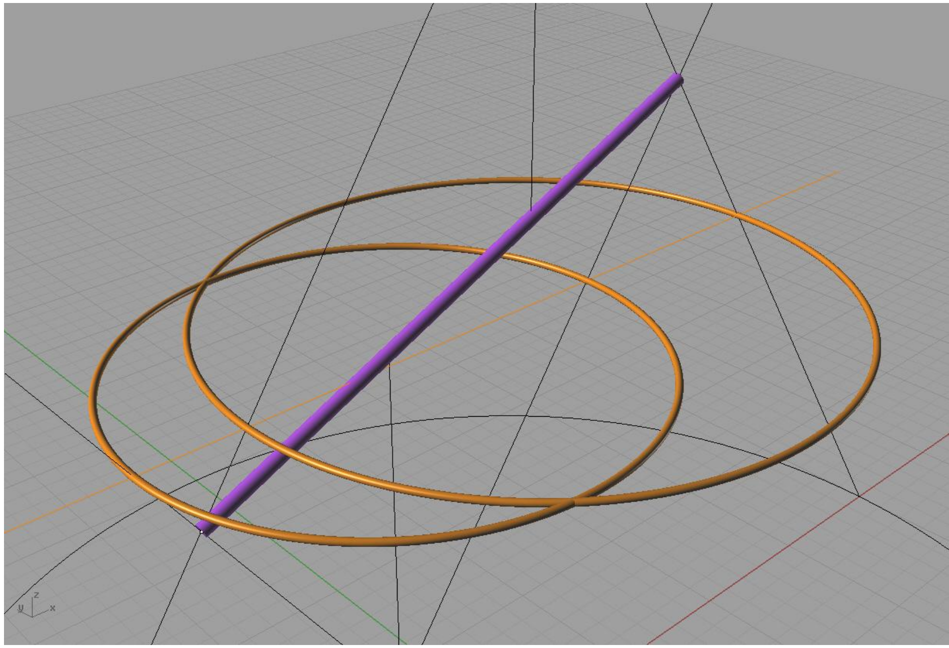


Supporti dimostrativi: ellisse.

2. Supponiamo di sezionare i coni con un piano normale agli assi in una posizione tale da intersecare anche il segmento costruito di cui al punto 1.

Il risultato sarà costituito da due cerchi intersecantisi tra loro.

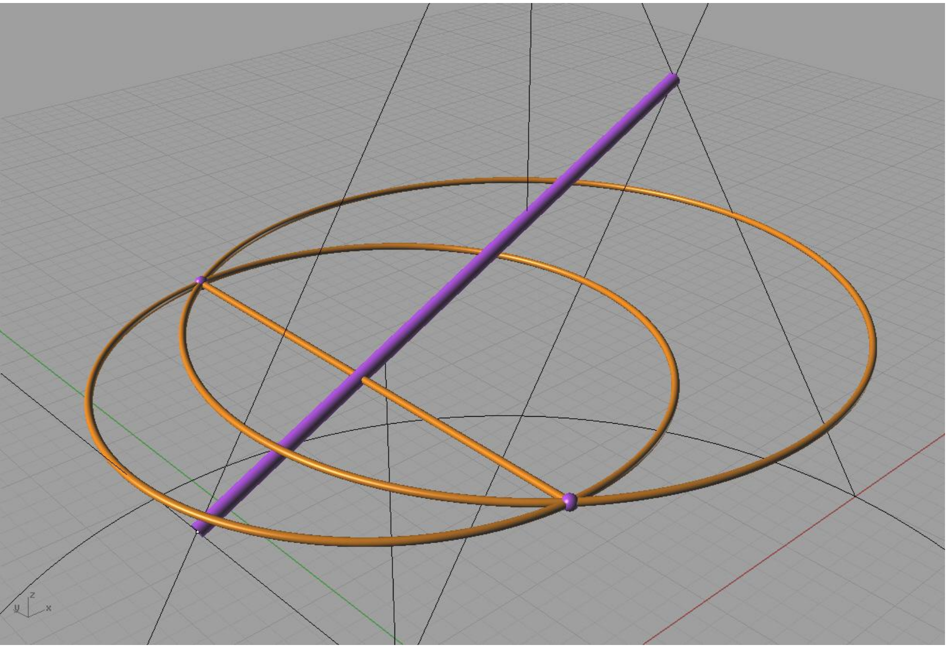


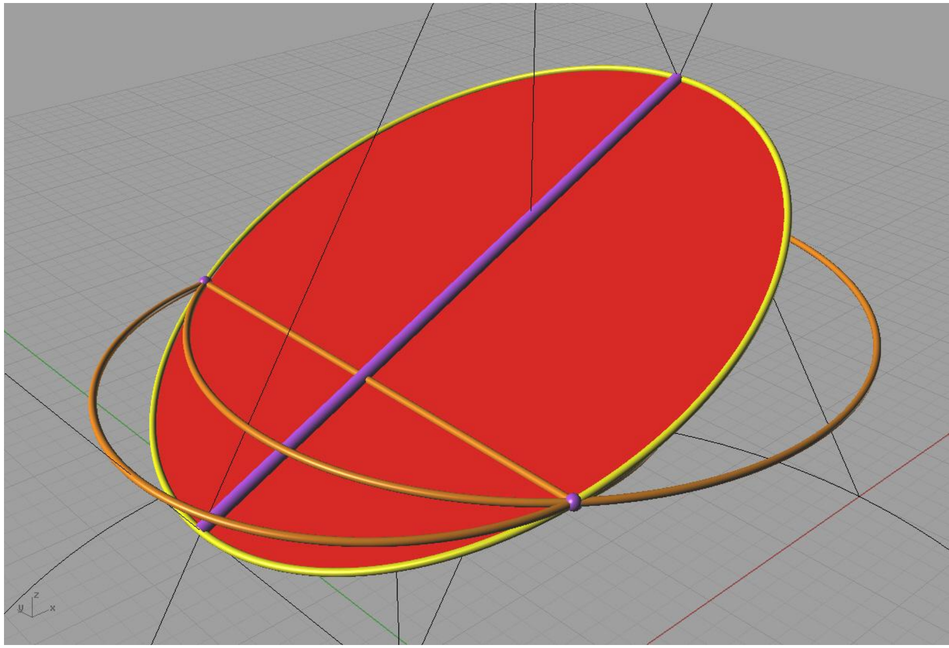


Supporti dimostrativi: ellisse.

3. Con l’intersezione dei cerchi si vengono a determinare due punti, il cui tratto di collegamento interseca il segmento di cui al punto 1 (viola).

4. Sussistono ora le condizioni per definire un piano. Stante l’inclinazione prescelta rispetto agli assi, intersecando almeno uno dei due coni, detto piano è portato a definire una sezione ellittica.





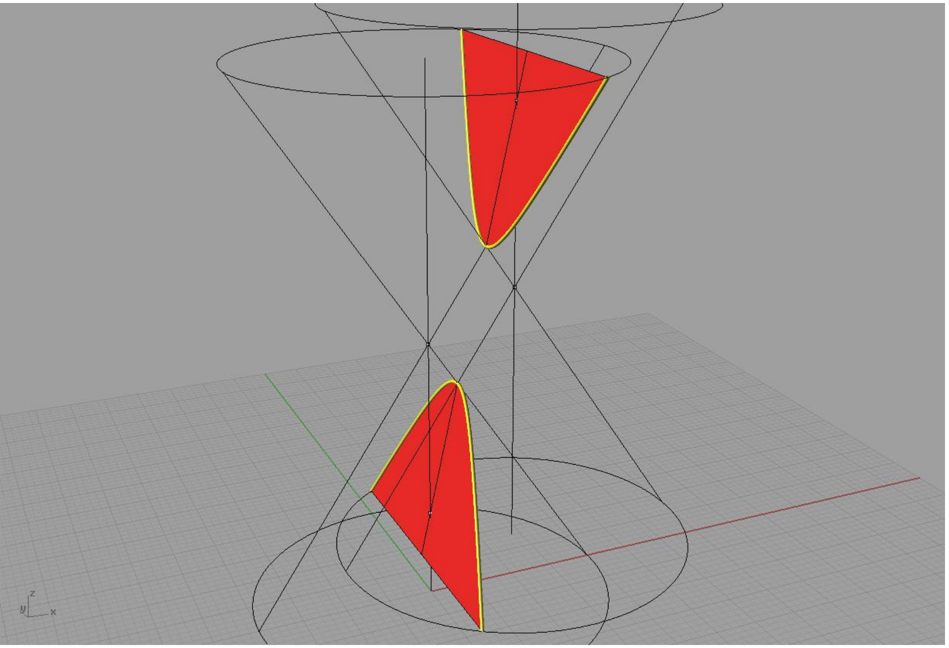
Supporti dimostrativi: iperbole.

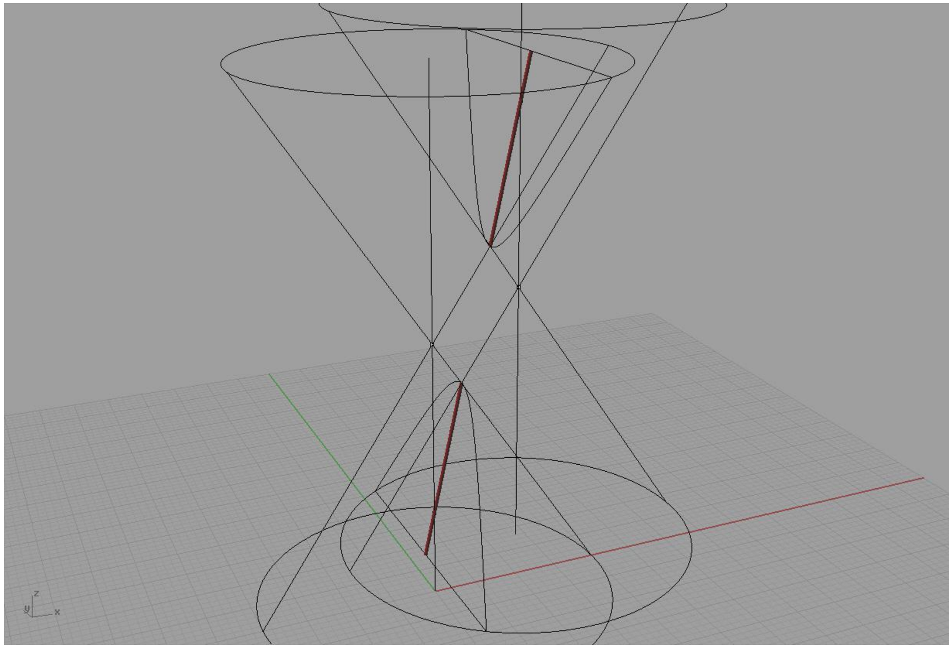
Ipotesi.

L'intersezione tra due coni uguali, sfalsati e ad assi paralleli, aventi i vertici esterni alle superfici dà luogo ad una rosa di punti complanari di forma iperbolica.

Tesi.

1. Tracciamo due segmenti a partire dai punti di reciproca intersezione dei coni, aventi in comune il piano di appartenenza degli assi.

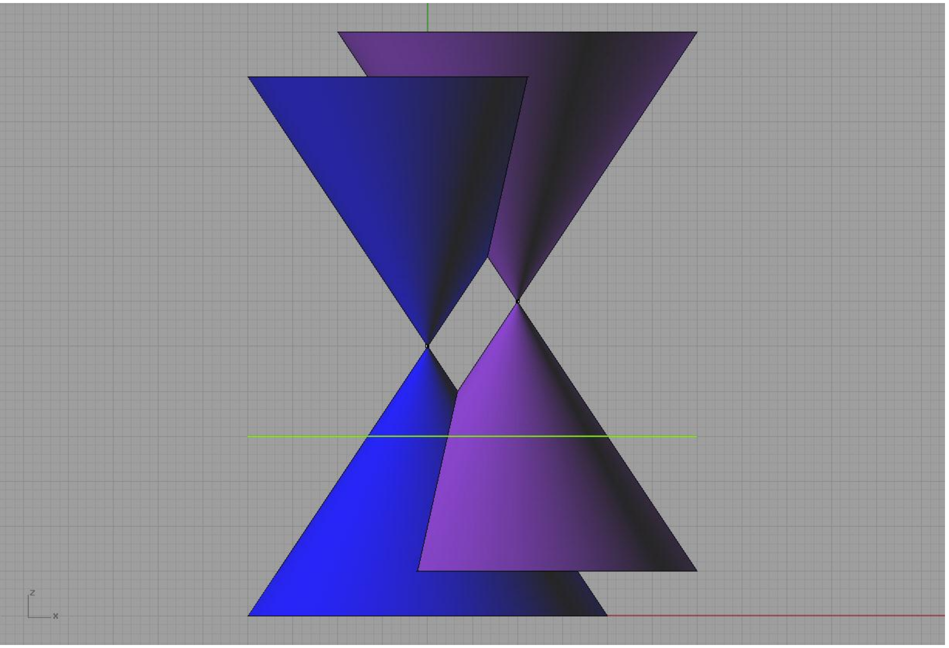


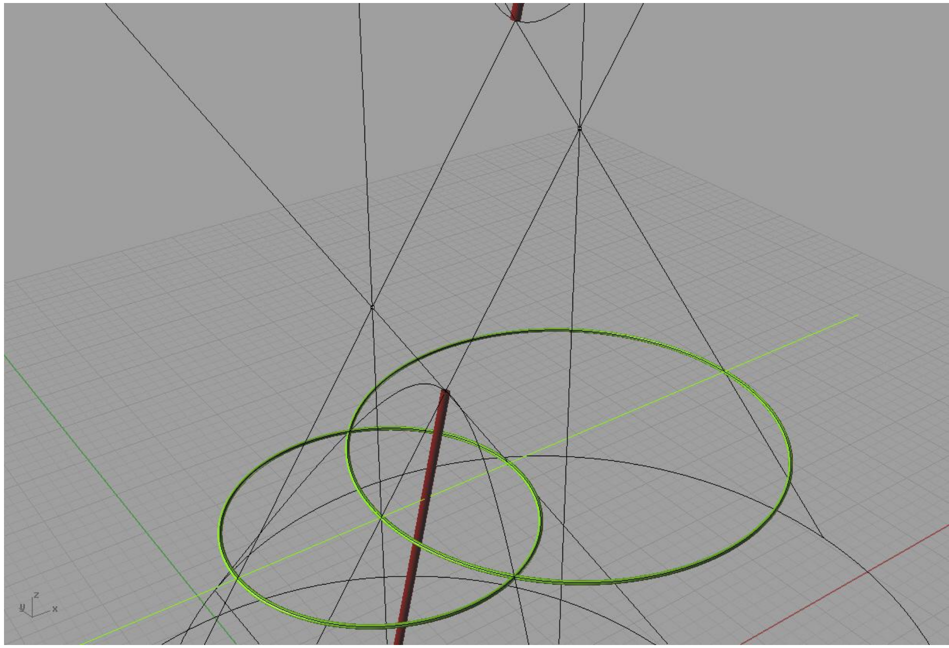


Supporti dimostrativi: iperbole.

2. Supponiamo di sezionare i coni con un piano normale agli assi in una posizione tale da intersecare anche il segmento costruito di cui al punto 1.

Il risultato sarà costituito da due cerchi intersecantisi tra loro.

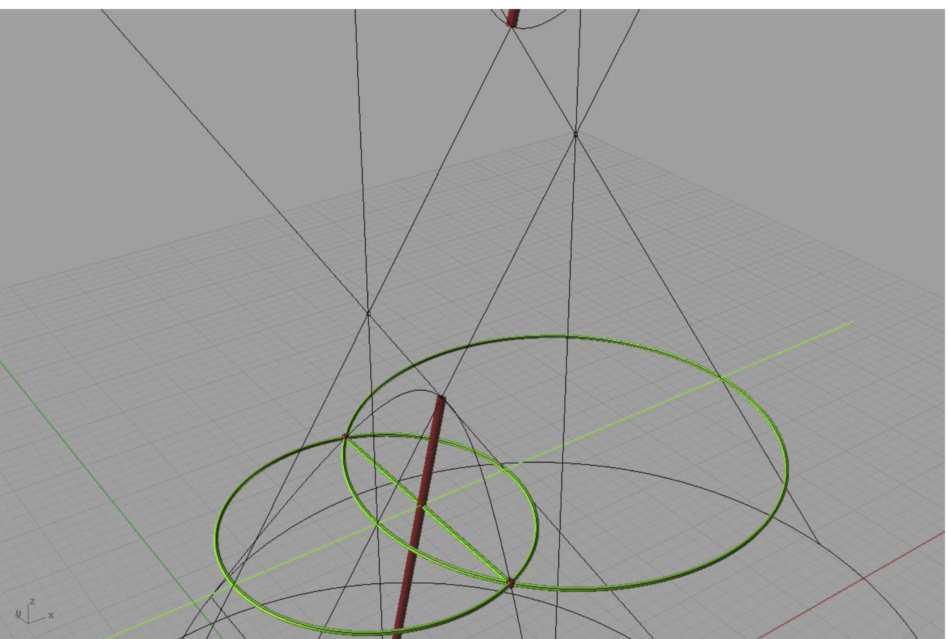


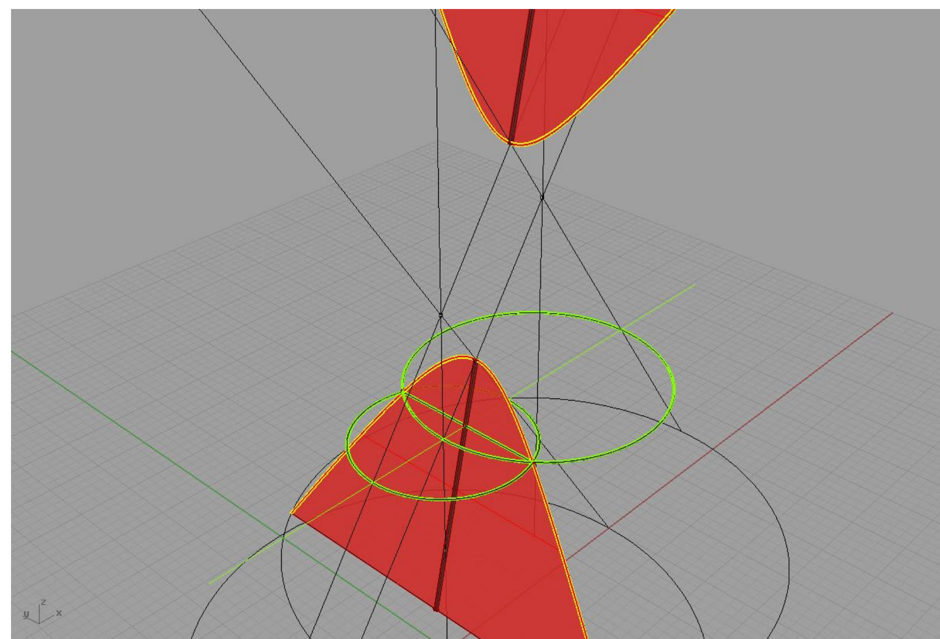


Supporti dimostrativi: iperbole.

3. Con l’intersezione dei cerchi si vengono a determinare due punti, il cui tratto di collegamento interseca il segmento di cui al punto 1 (bruno).

4. Sussistono ora le condizioni per definire un piano. Stante l’inclinazione prescelta rispetto agli assi, intersecando almeno uno dei due coni, detto piano è portato a definire una sezione iperbolica.





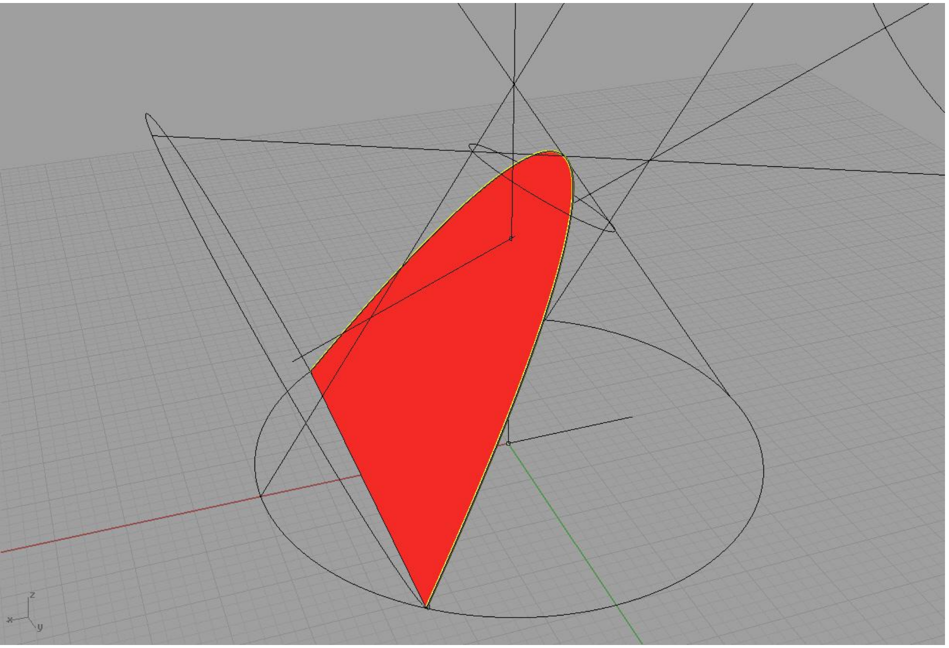
Supporti dimostrativi: parabola.

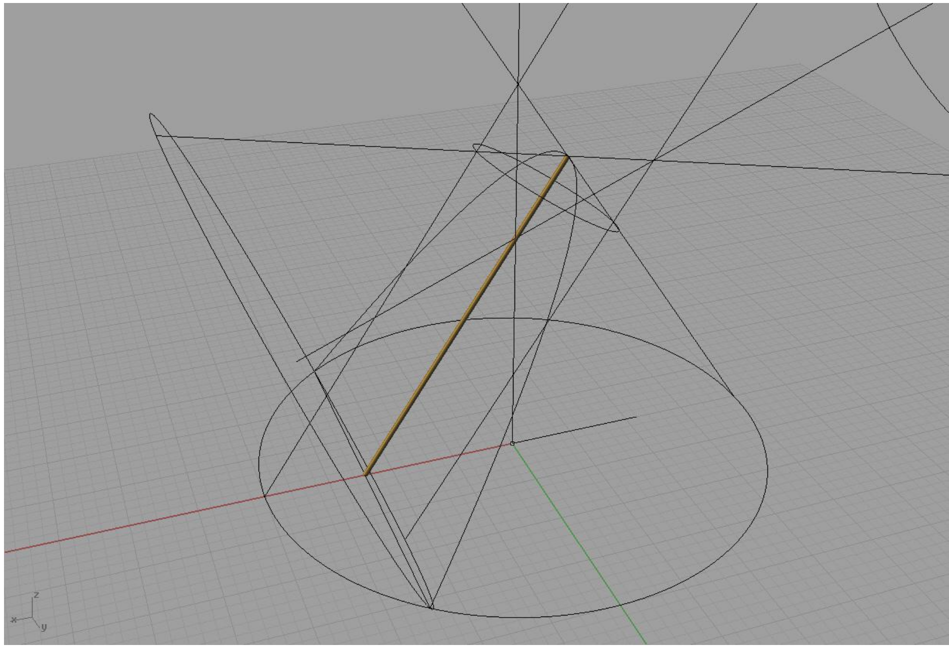
Ipotesi.

L’intersezione tra due coni uguali, in modo che opposte generatrici siano parallele e i vertici siano allineati secondo una direttrice normale alle dette generatrici, dà luogo ad una rosa di punti complanari di forma parabolica.

Tesi.

1. Tracciamo un segmento a partire dal punto di reciproca intersezione dei coni, parallelo alle sopraddette generatrici, giacente sul piano di appartenenza degli assi.

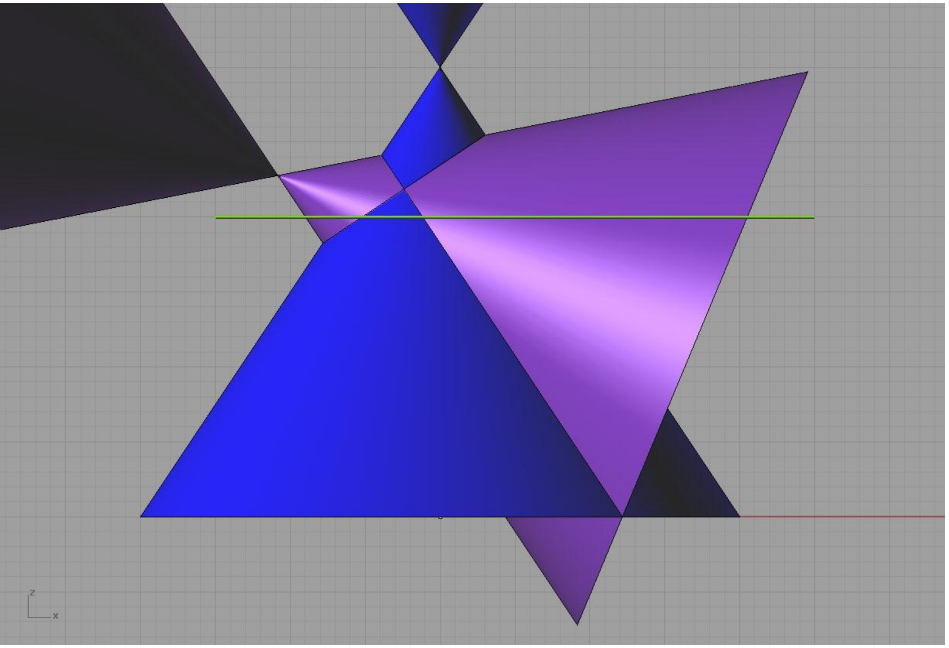


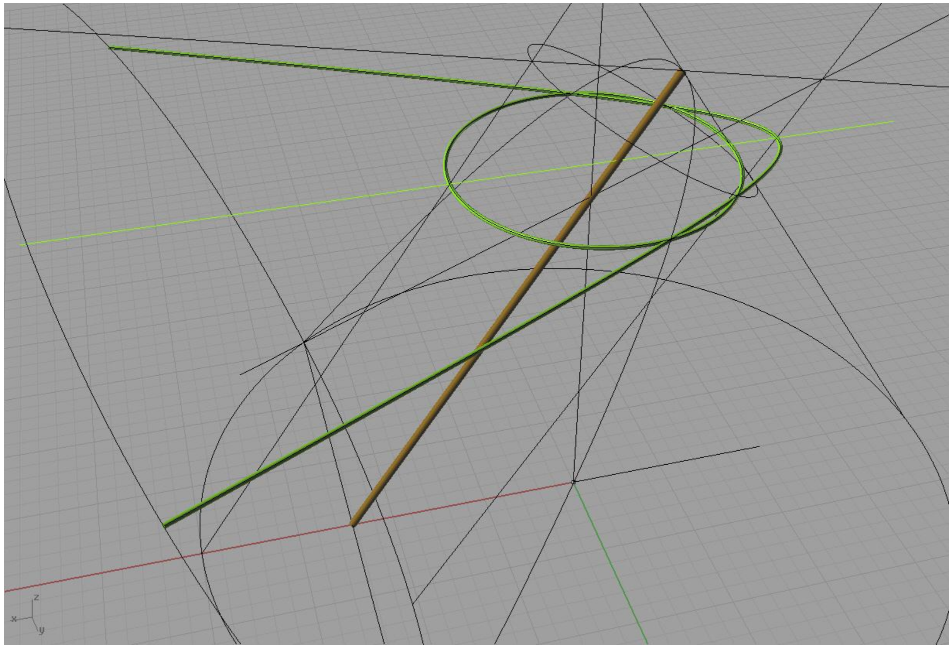


Supporti dimostrativi: parabola.

2. Supponiamo di sezionare i coni con un piano normale all’asse di uno di essi, in una posizione tale da intersecare anche il segmento costruito di cui al punto 1.

Il risultato sarà costituito da un cerchio e un’iperbole (un ramo) intersecantisi tra loro.

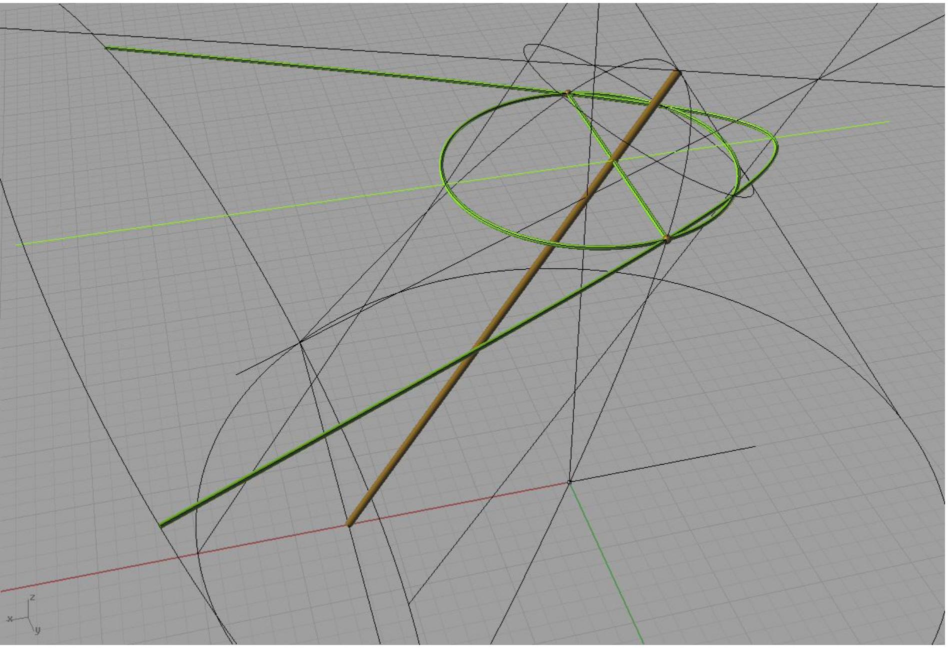


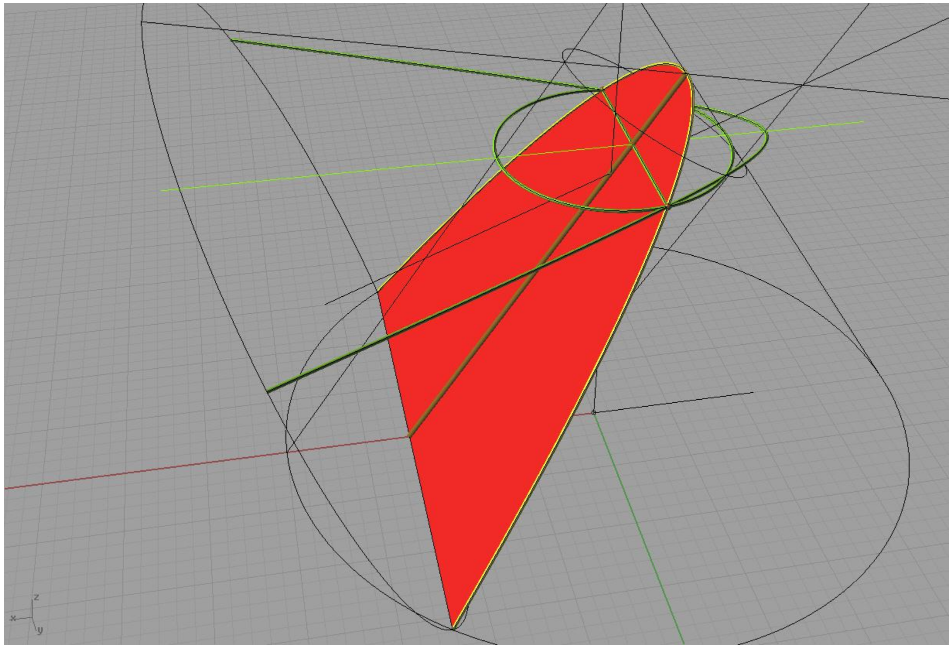


Supporti dimostrativi: parabola.

3. Con l’intersezione di cerchio e iperbole si vengono a determinare quattro punti, il cui tratto di collegamento di due di essi interseca il segmento di cui al punto 1 (marrone).

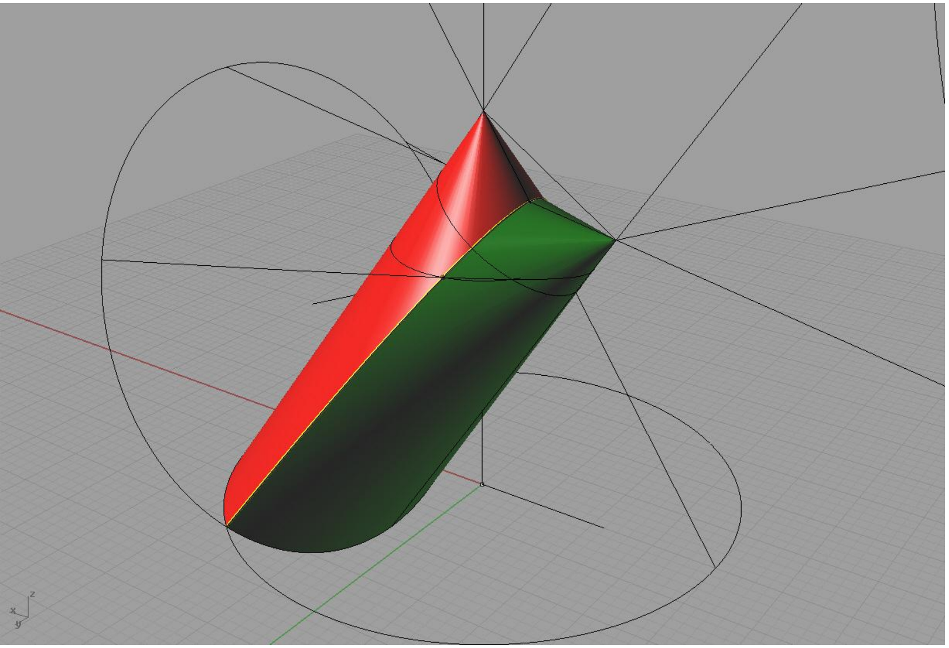
4. Sussistono ora le condizioni per definire un piano. Stante l’inclinazione prescelta rispetto agli assi, intersecando almeno uno dei due coni, detto piano è portato a definire una sezione parabolica.

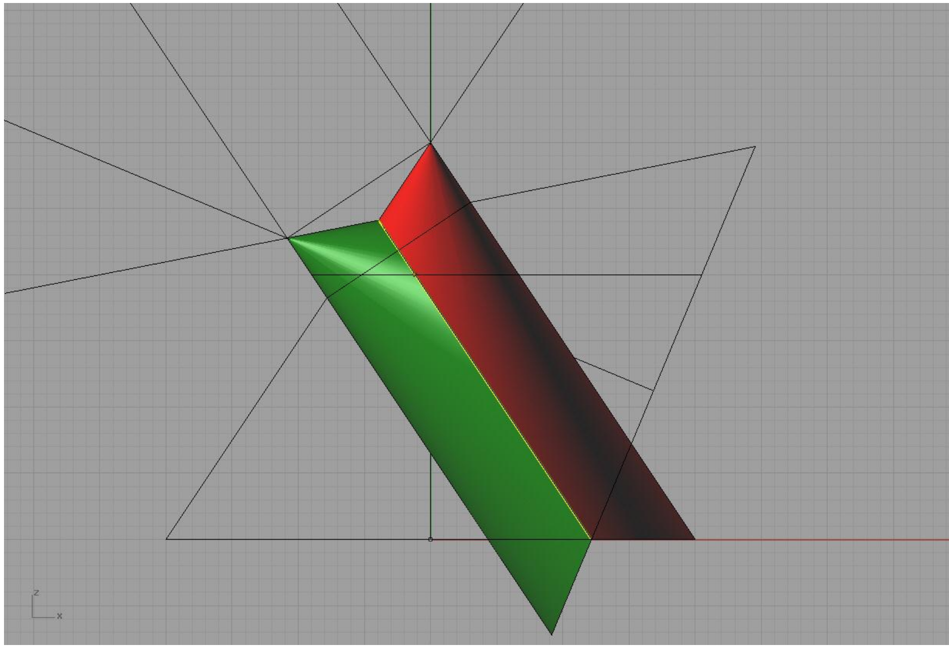




Supporti dimostrativi: parabola.

5. Per la parabola, oltre all'esposizione illustrata in coerenza ad ellisse ed iperbole, vale la considerazione che due coni uguali accostati, tali da avere due generatrici opposte parallele e i vertici allineati secondo la normale ad esse, non possono che avere un piano quale elemento di simmetria. Pertanto la loro intersezione non può che dare luogo ad una parabola.

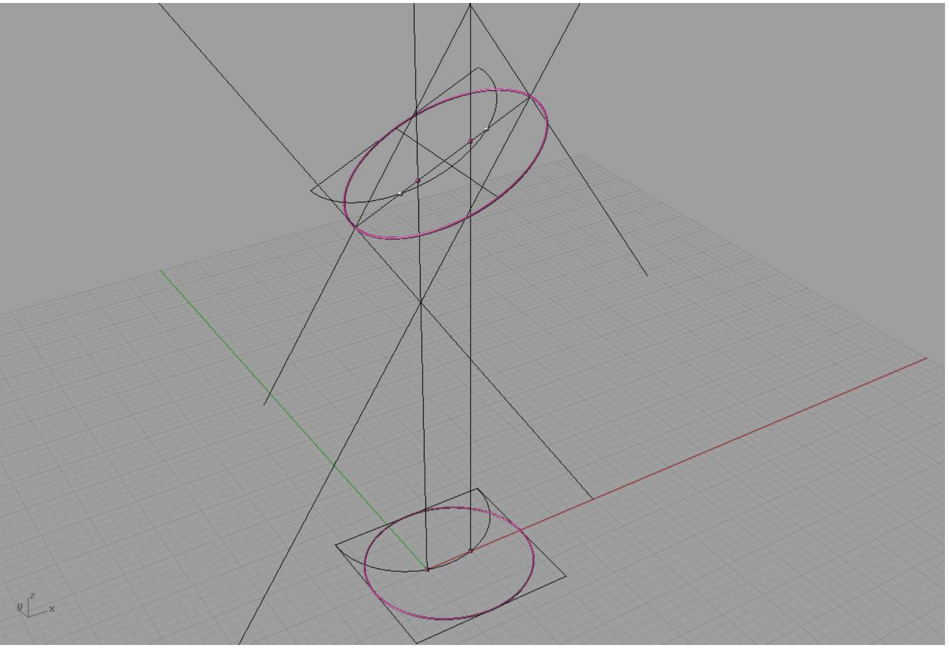


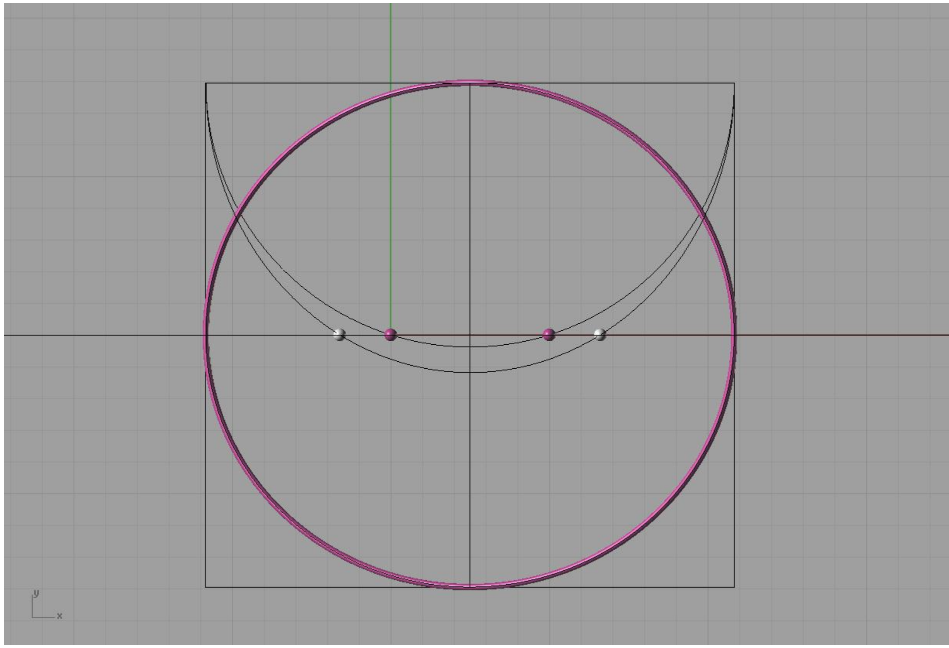


Aspetti proiettivi: ellisse.

L’ellisse scaturita dall’intersezione di due coni uguali, se proiettata su di un piano normale agli assi, produce una seconda ellisse, i cui fuochi sono allineati agli assi medesimi.
Sussistendo diversa eccentricità, i fuochi della prima ellisse sono distinti da quelli della seconda; inoltre, in proiezione risultano a due a due distinti.

Nella figura a destra l’arco teso ad identificare i fuochi della prima ellisse (bianchi) è ellittico, a differenza di quello circolare della seconda (porpora).

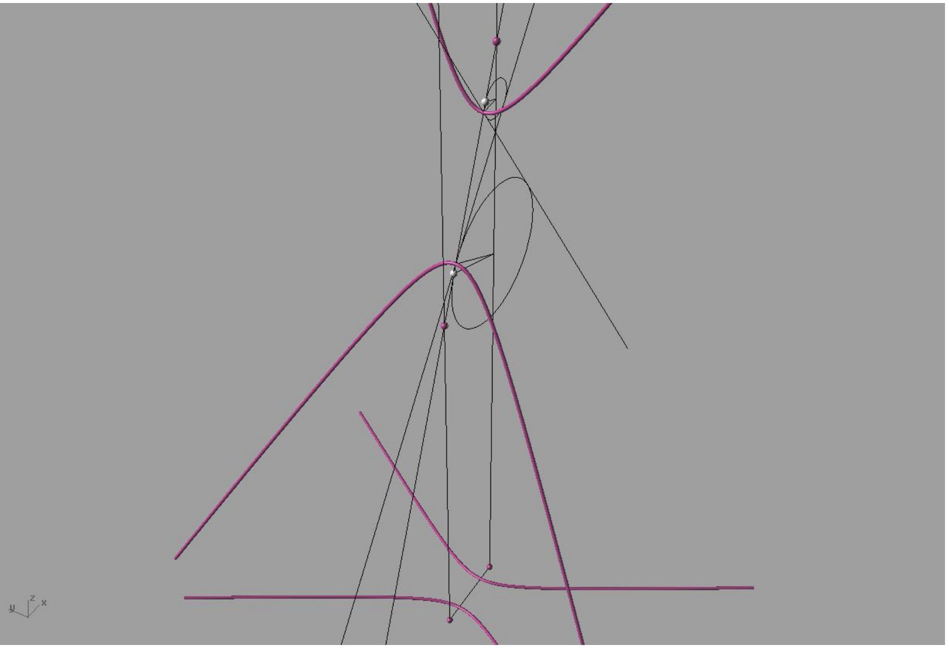


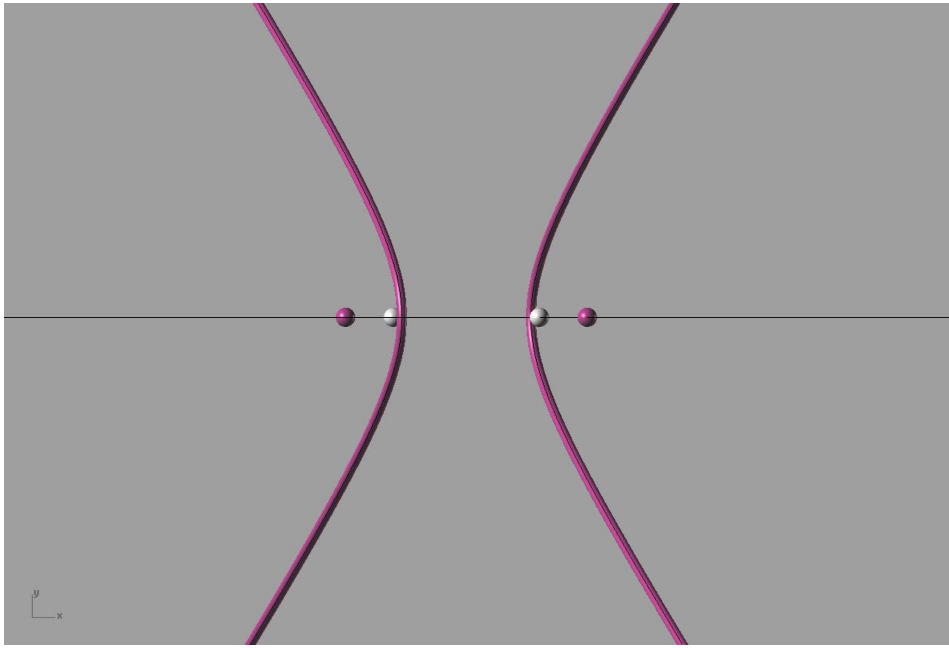


Aspetti proiettivi: iperbole.

L'iperbole scaturita dall'intersezione di due coni uguali, se proiettata su di un piano normale agli assi, produce una seconda iperbole, i cui fuochi sono allineati agli assi medesimi. Sussistendo diversa eccentricità, i fuochi della prima iperbole sono distinti da quelli della seconda; inoltre, in proiezione risultano a due a due distinti.

I fuochi ricavati nella figura proiettante (bianchi) sono stati individuati applicando il metodo delle sfere di Dandelin.

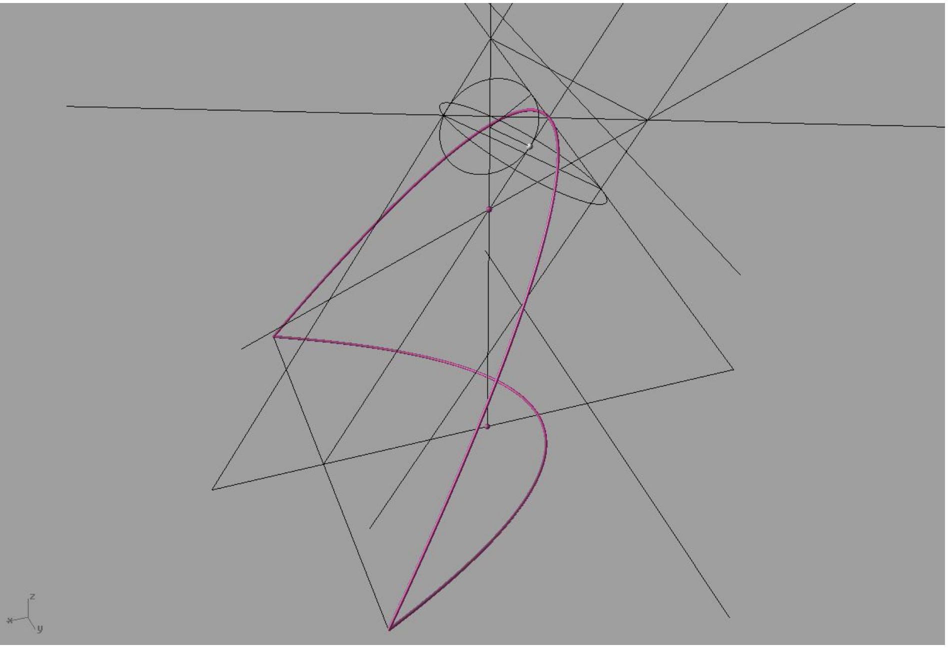


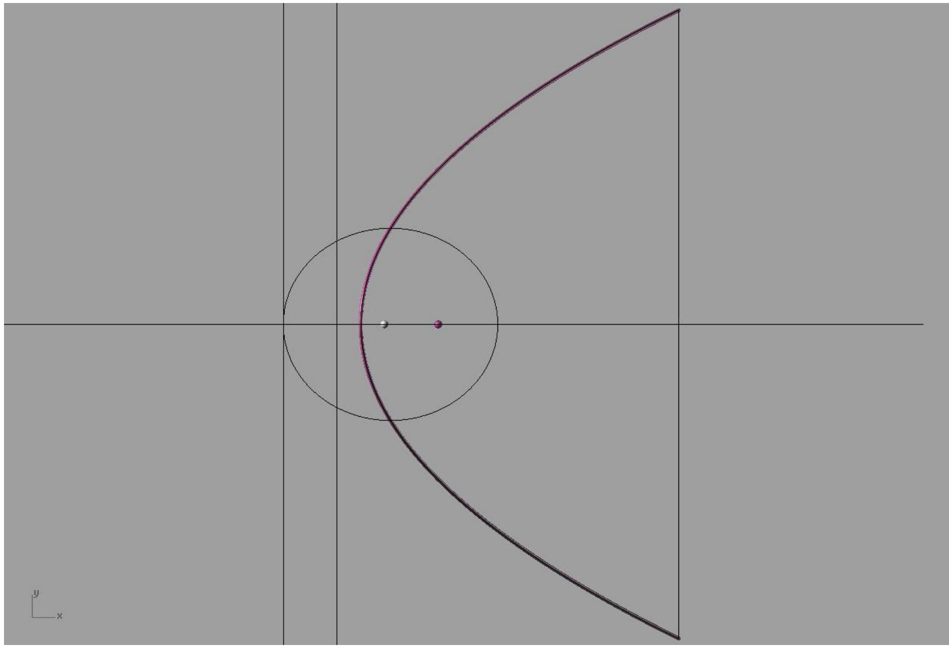


Aspetti proiettivi: parabola.

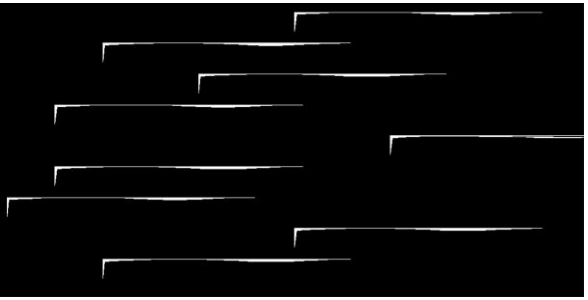
La parabola scaturita dall’intersezione di due coni uguali, se proiettata su di un piano normale agli assi, produce una seconda parabola, il cui fuoco è allineato all’asse medesimo.
Sussistendo tra le due parabole di diversa dimensione, il fuoco della prima è distinto da quello della seconda; inoltre, in proiezione risultano distinti.

Il fuoco ricavato nella figura proiettante (bianco) è stato individuato applicando il metodo delle sfere di Dandelin.

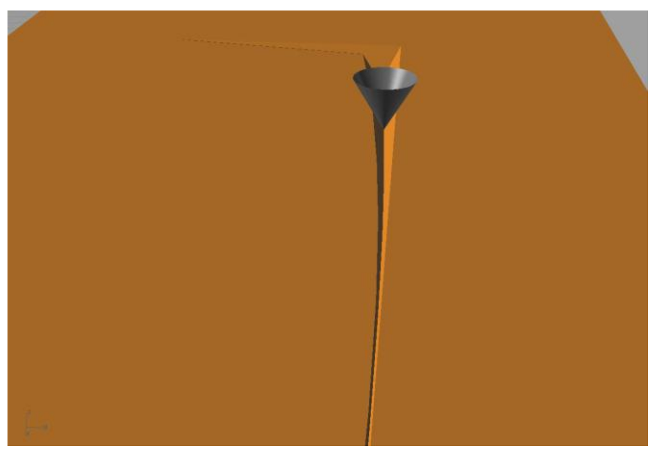


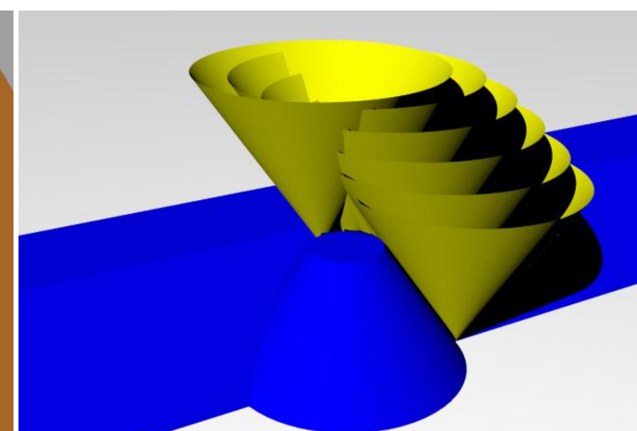


Lo spunto da cui sono partito.



Lo spunto è stato tecnico. Tutto è nato da un equivoco: un disegno ombreggiato ortocromatico sottopostomi l'ho interpretato come mappa planare. Ho supposto che gli spazi bianchi (neri, nello stato iniziale) fossero incisioni, invece erano ombre su superfici ondulate (pannello reale). Nell'affrontare (in modo distorto) il problema dello stabilire il percorso di una fresa a cono per incidere il legno, mi si è posta la questione della linea di equidistanza tra i bordi. Poiché alcuni di essi erano rettilinei ed altri curvilinei, ma tutti con la stessa inclinazione, fu facile figurarmi la genesi di una sezione conica. I passi successivi sono serviti per confermare l'ipotesi e sviscerare il problema. Fu facile in seguito leggere il fenomeno in archetipi esistenti, come certe bugne di porte barocche.



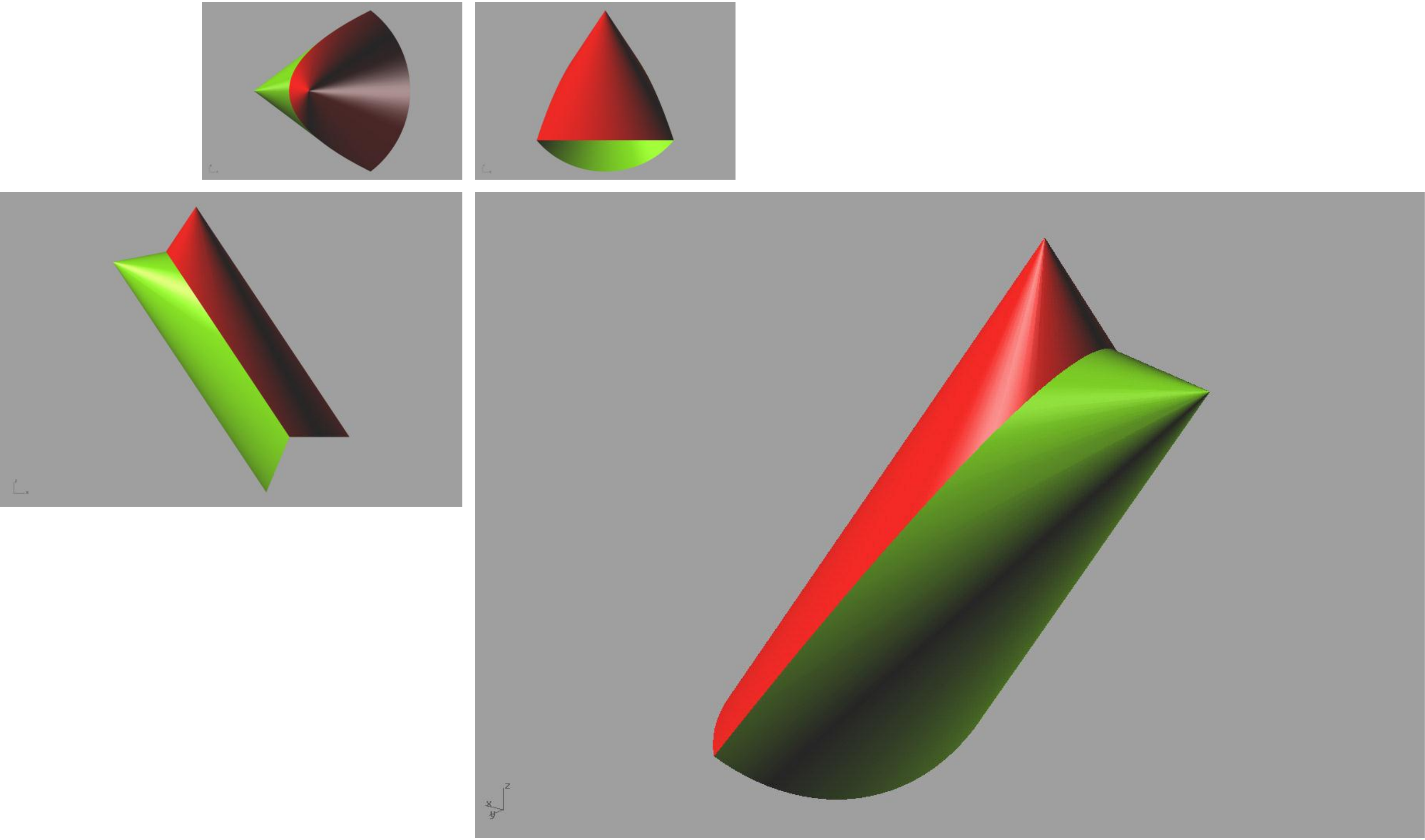


Frammenti conici - fenomenologia pre-poietica.

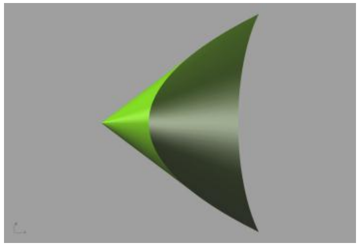
Ho rilevato e messo in rassegna alcuni frammenti di superfici scaturiti da queste intersezioni di coni. L'idea è di comporre un repertorio sistematico di forme per fare design.

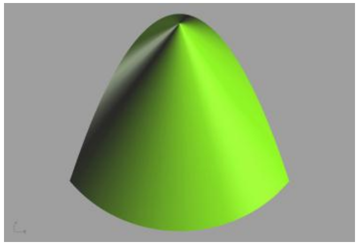
Il presupposto è che la ricerca della forma sia una condizione incessante e imprescindibile per fare oggetti d'uso, non soltanto perché mutano di continuo le condizioni funzionali e le tecnologie produttive, ma pure perché è sempre stringente la necessità di nuove suggestioni figurative. La ricerca della forma non va dunque intesa come fatto a se stante, seppure il metodo più attendibile per sperimentare non possa essere che quello di manipolare con spirito di rigore linee, superfici e volumi. In ogni caso, poco o tanto, la geometria - il suo stato astratto - deve piegarsi, o addolcirsi, o contaminarsi alle esigenze del mondo materiale, degli scenari funzionali, delle proiezioni immaginative. La sintesi formale degli esseri viventi parrebbe un esempio eclatante in tal senso. A prima vista, emergerebbe una sorta di commistione tra forma, geometria e fisica, ma è con gli stadi più avanzati della biologia che si sublima la dimensione di sistema, il quale, quando «aperto», è oggi lo strumento più sofisticato per comprendere il mondo.

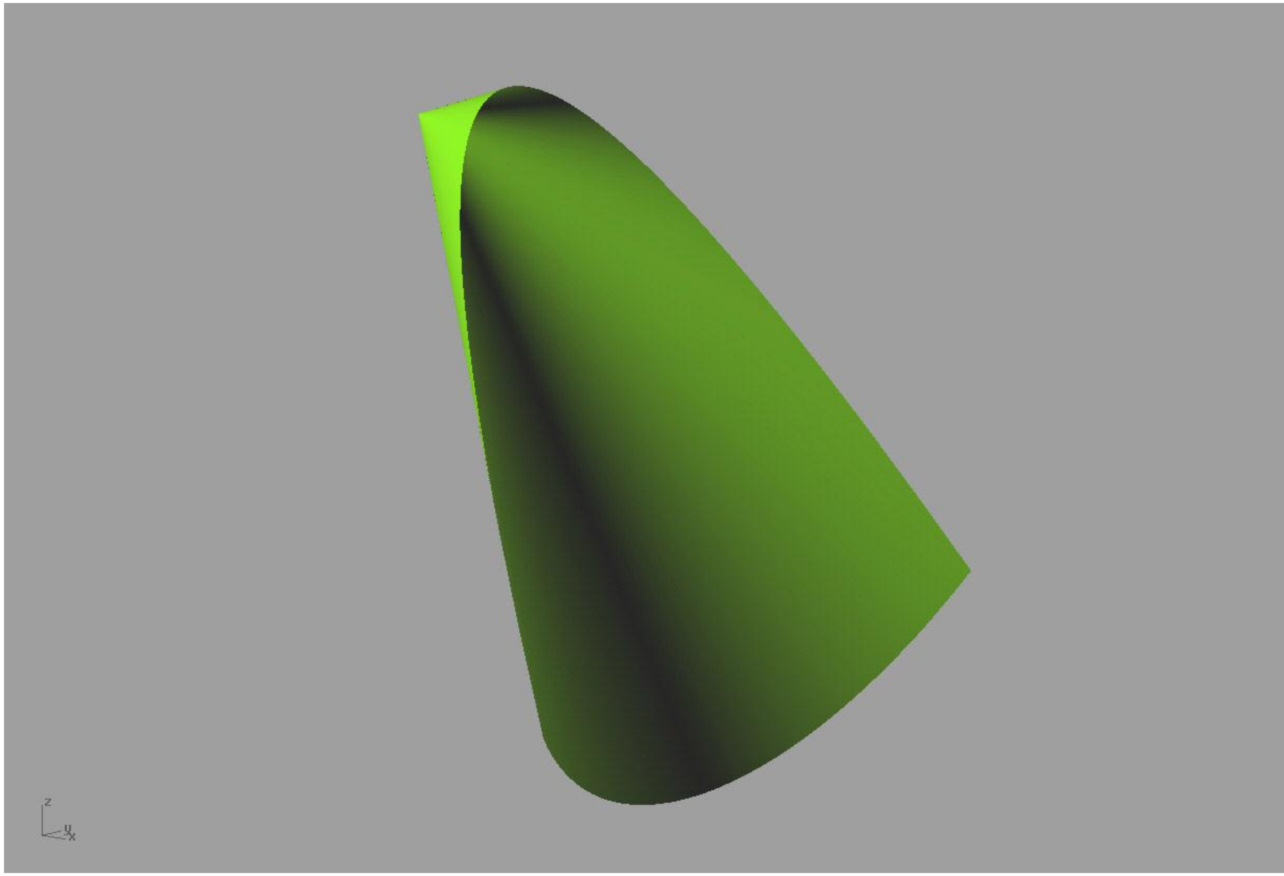
Due coni per una parabola



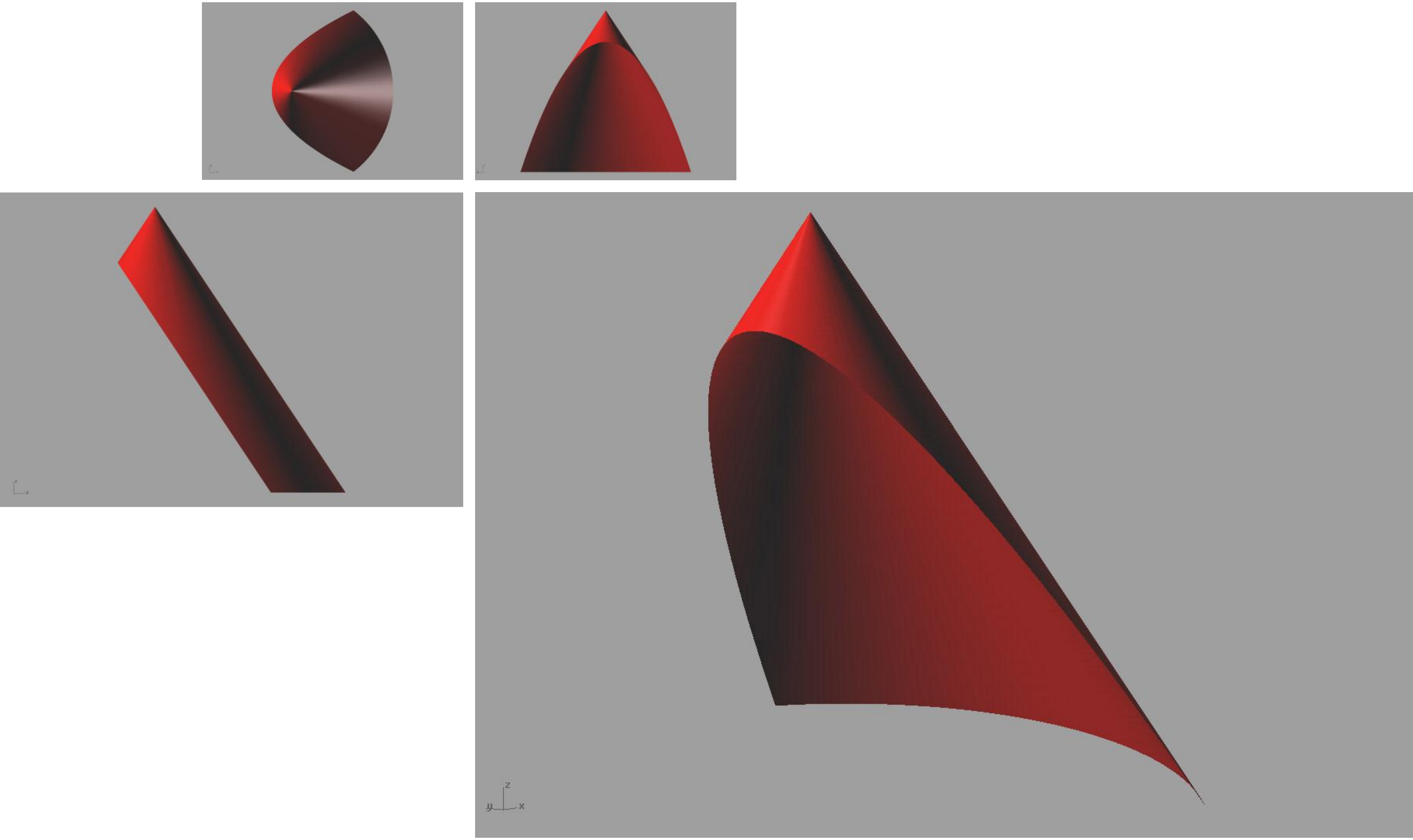
Un cono per una parabola - 1.



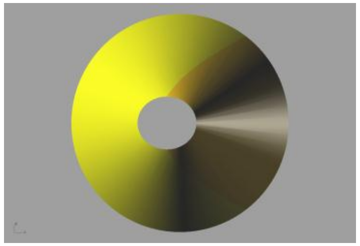


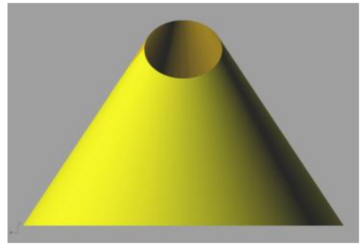


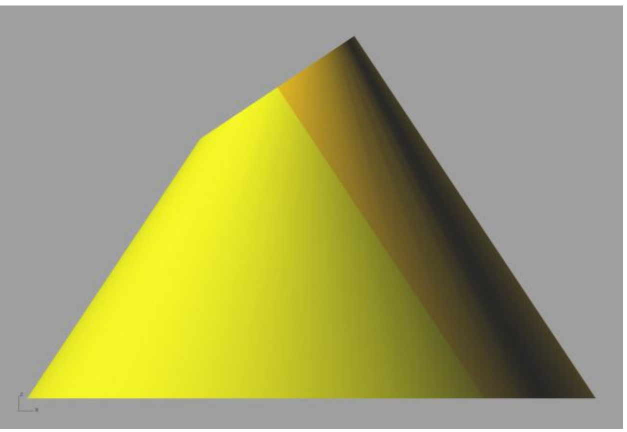
Un cono per una parabola - 2.

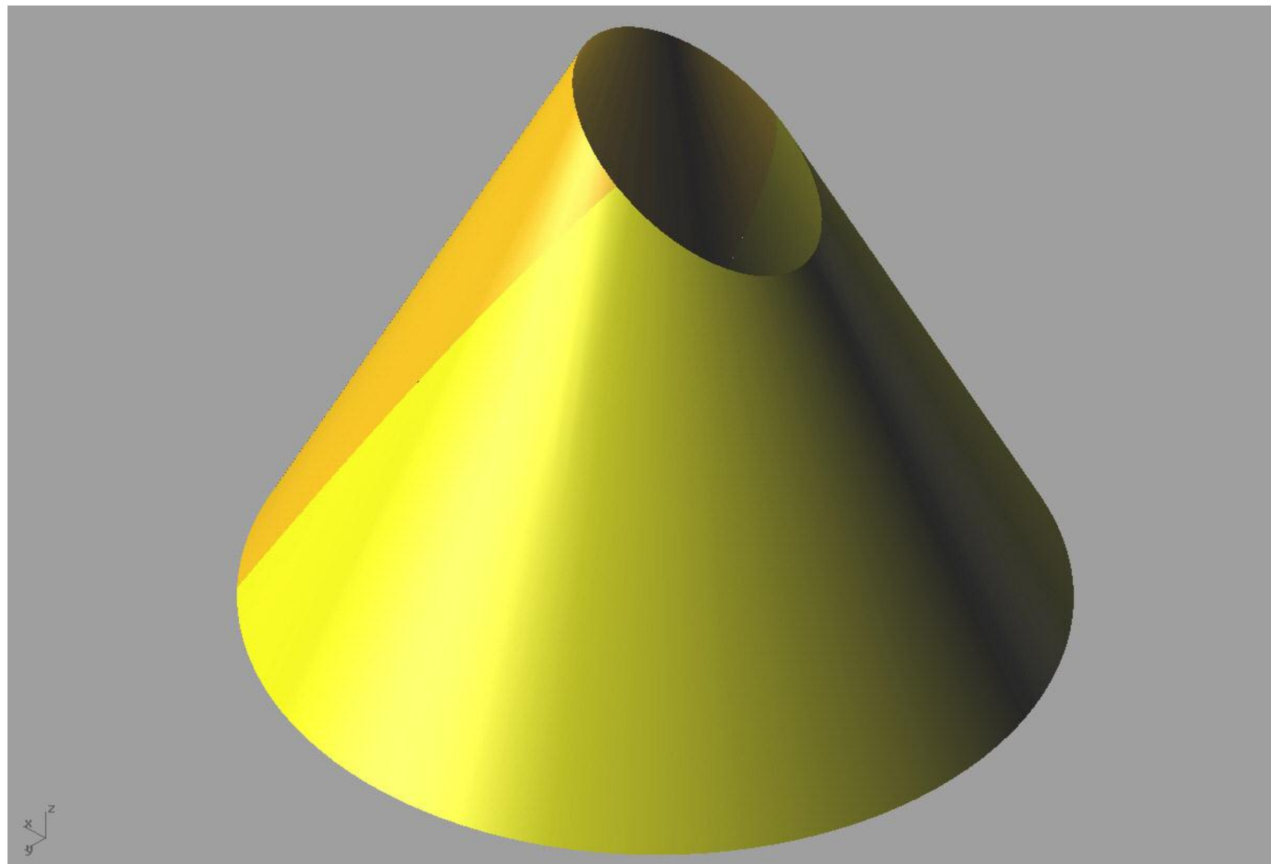


Due coni per una parabola - variazioni - 1.

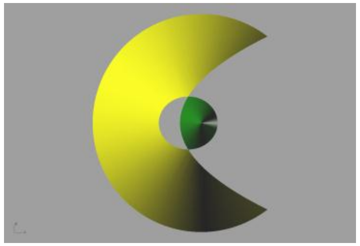


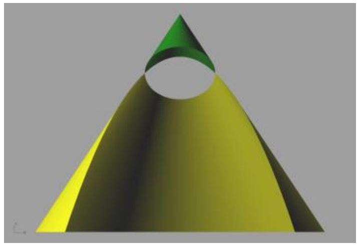


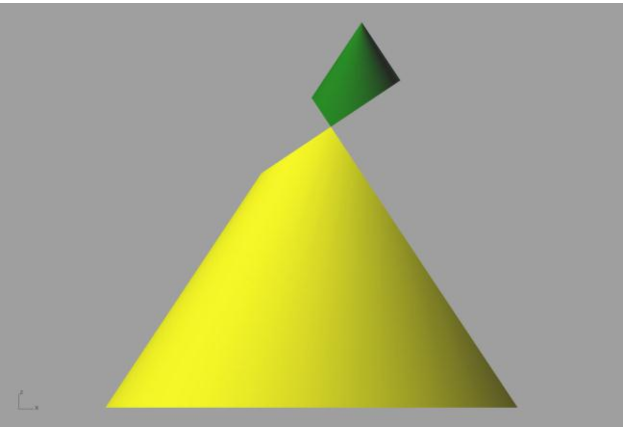


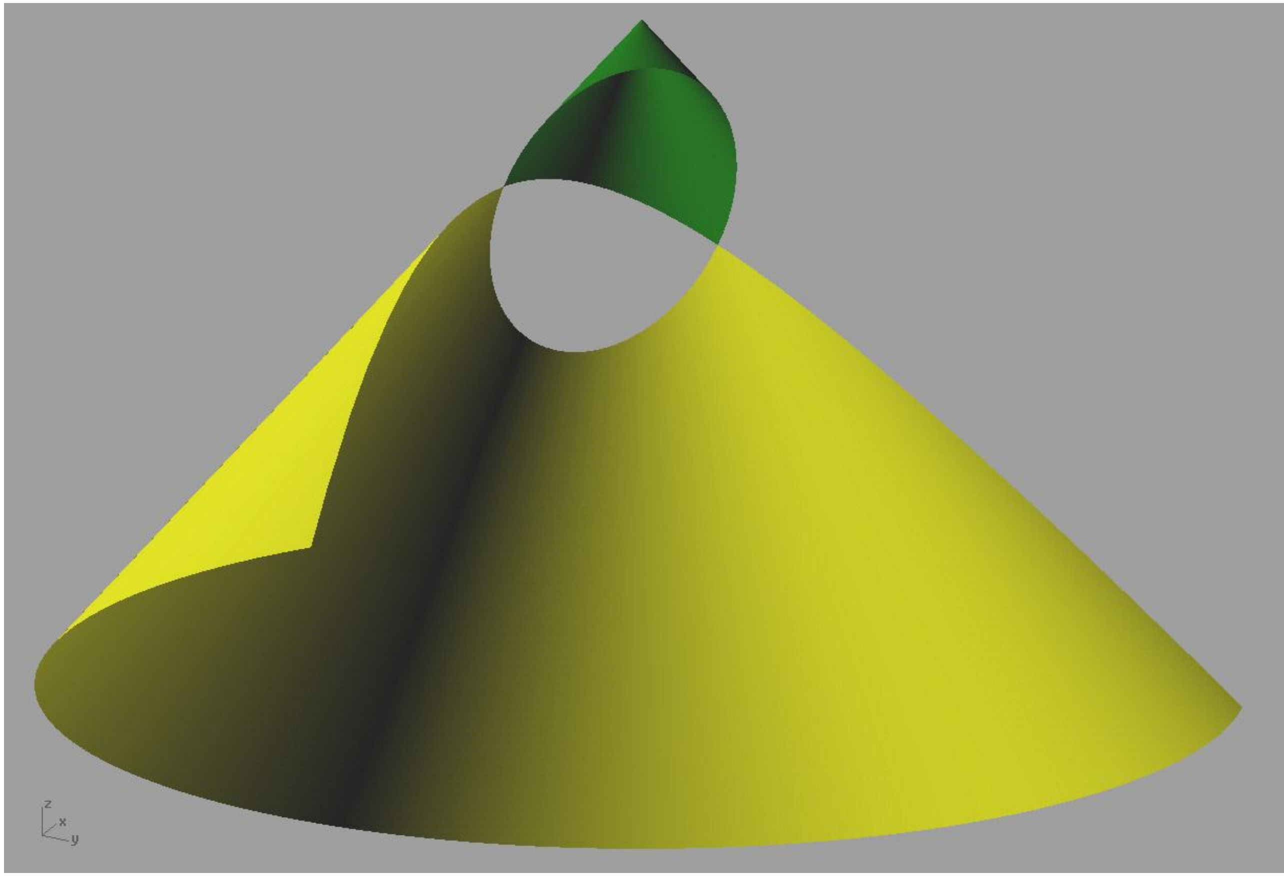


Due coni per una parabola - variazioni - 2.

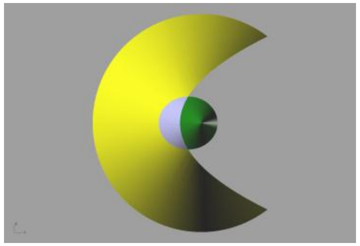


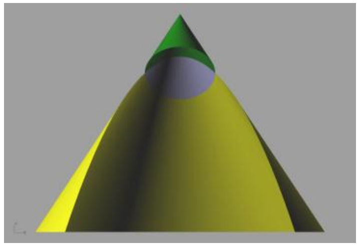


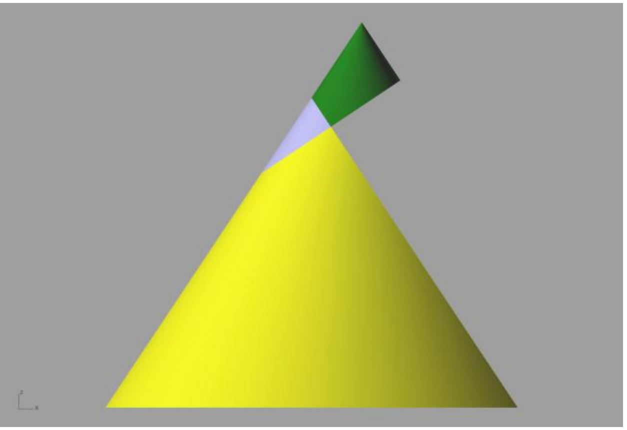


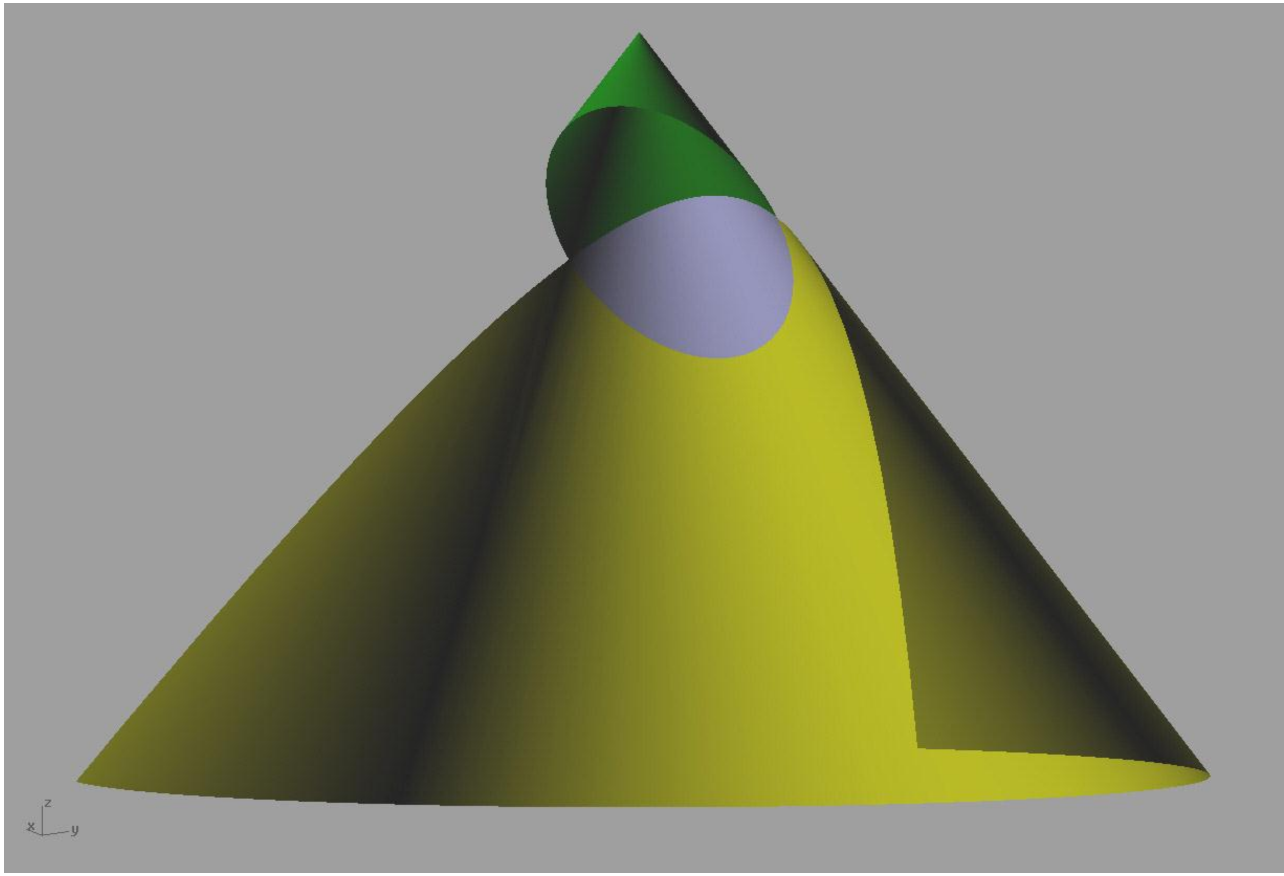


Due coni per una parabola - variazioni - 3.

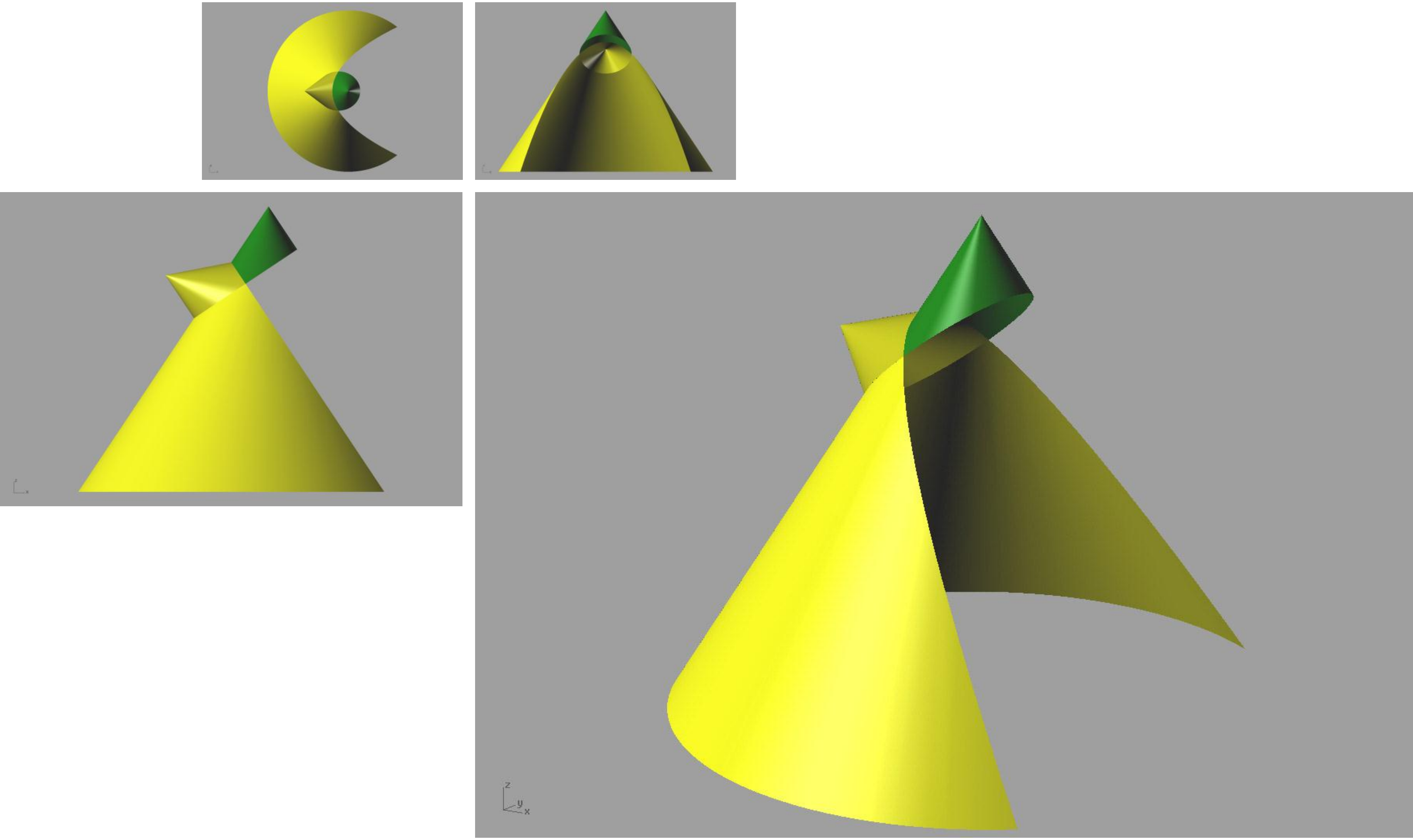




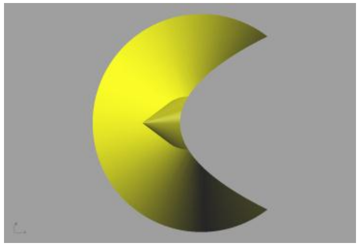


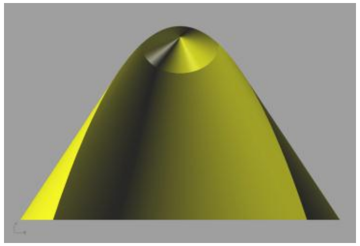


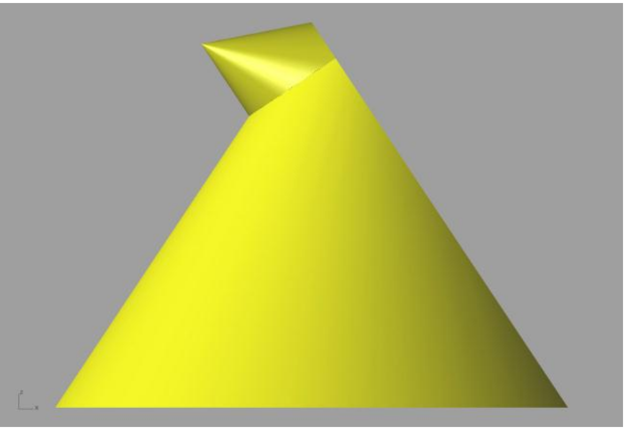
Due coni per una parabola - variazioni - 4.

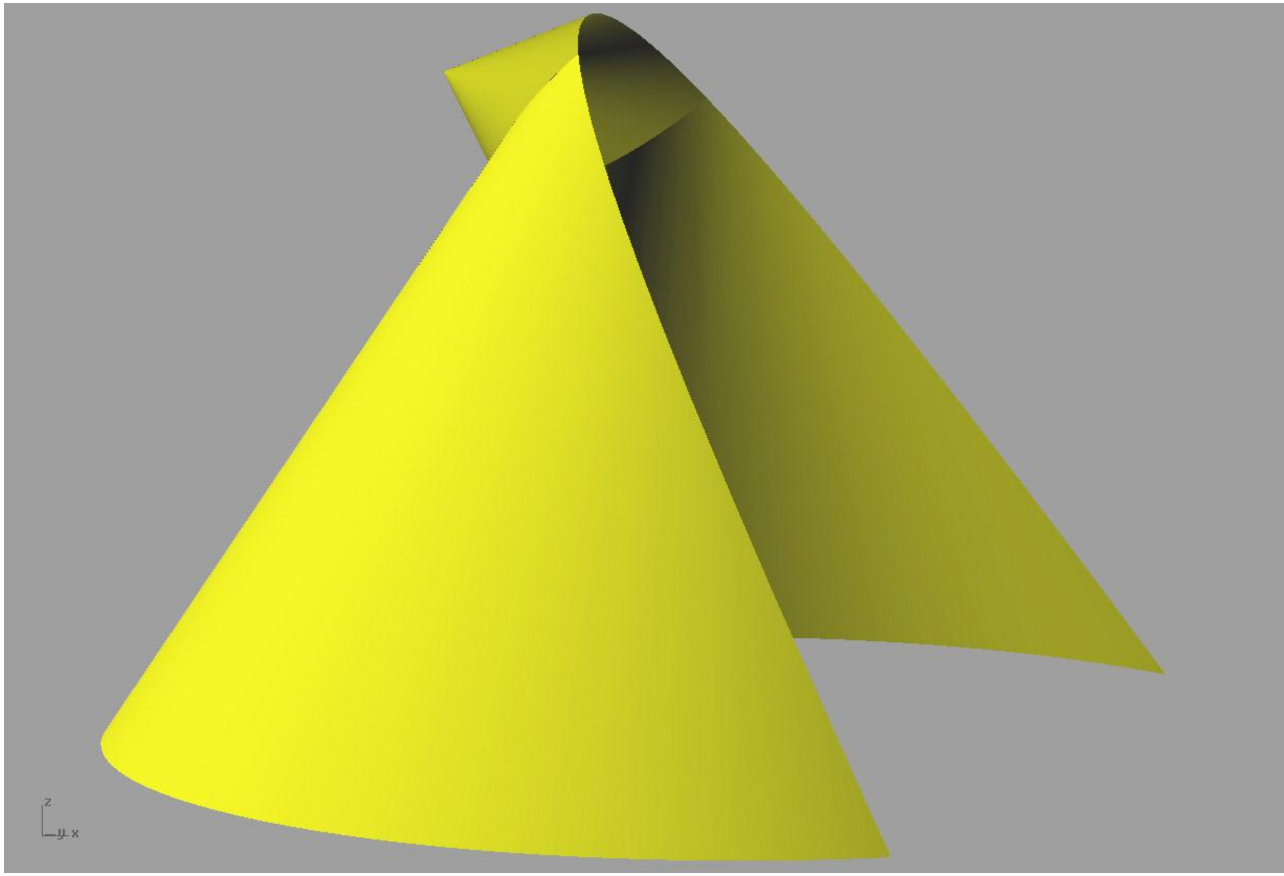


Due coni per una parabola - variazioni - 5.

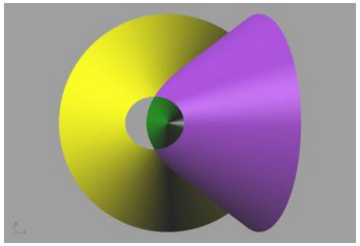


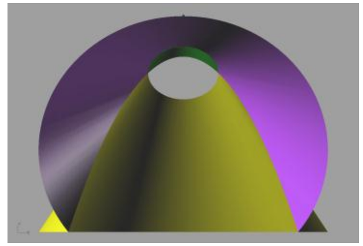


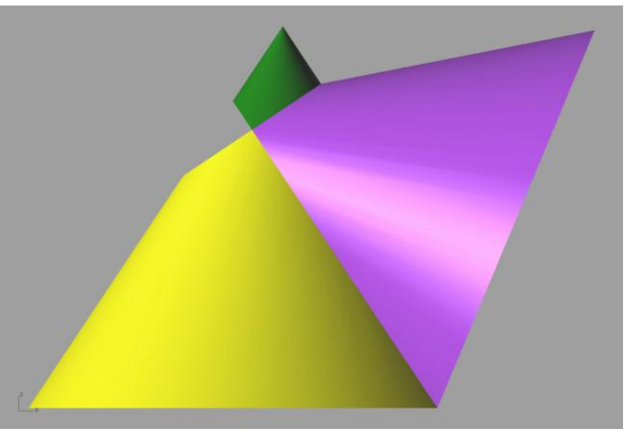


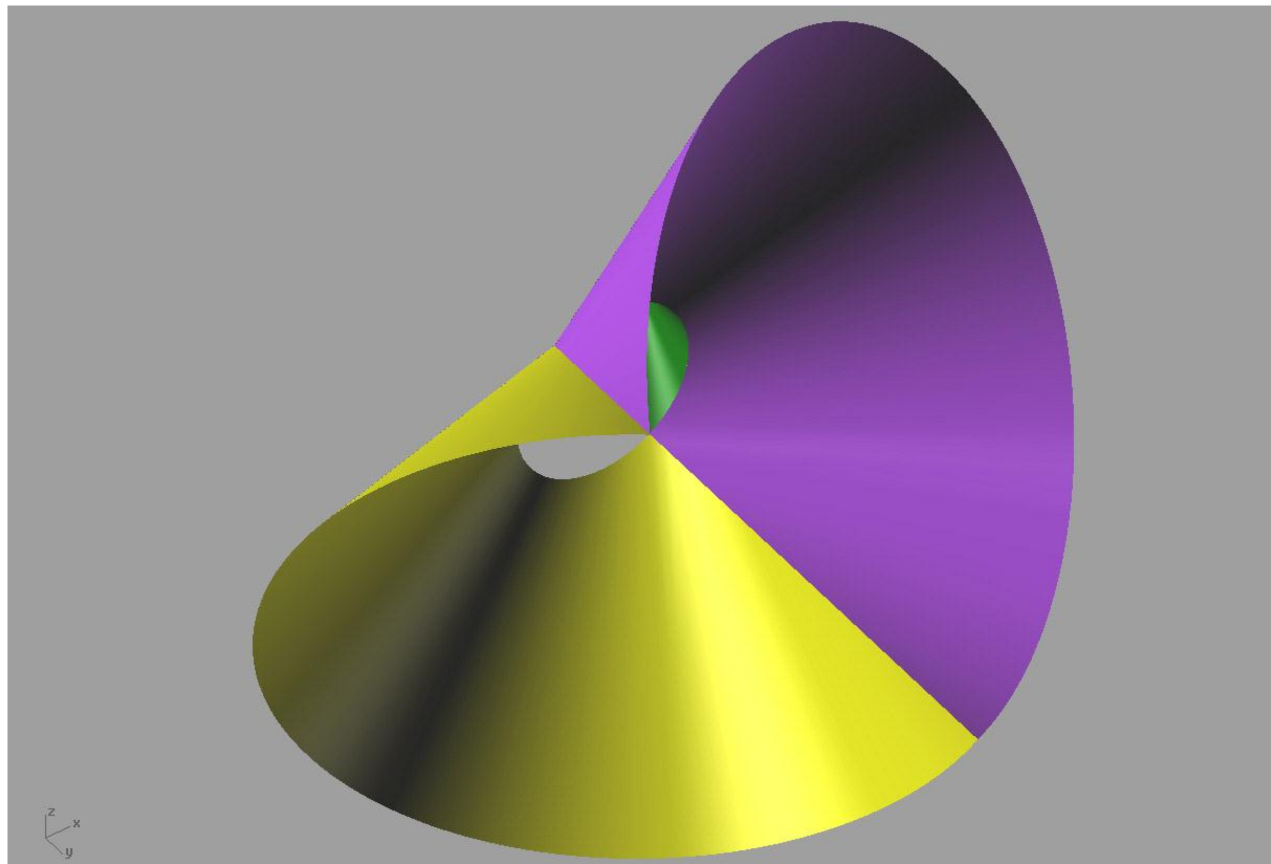


Due coni per una parabola - variazioni - 6.

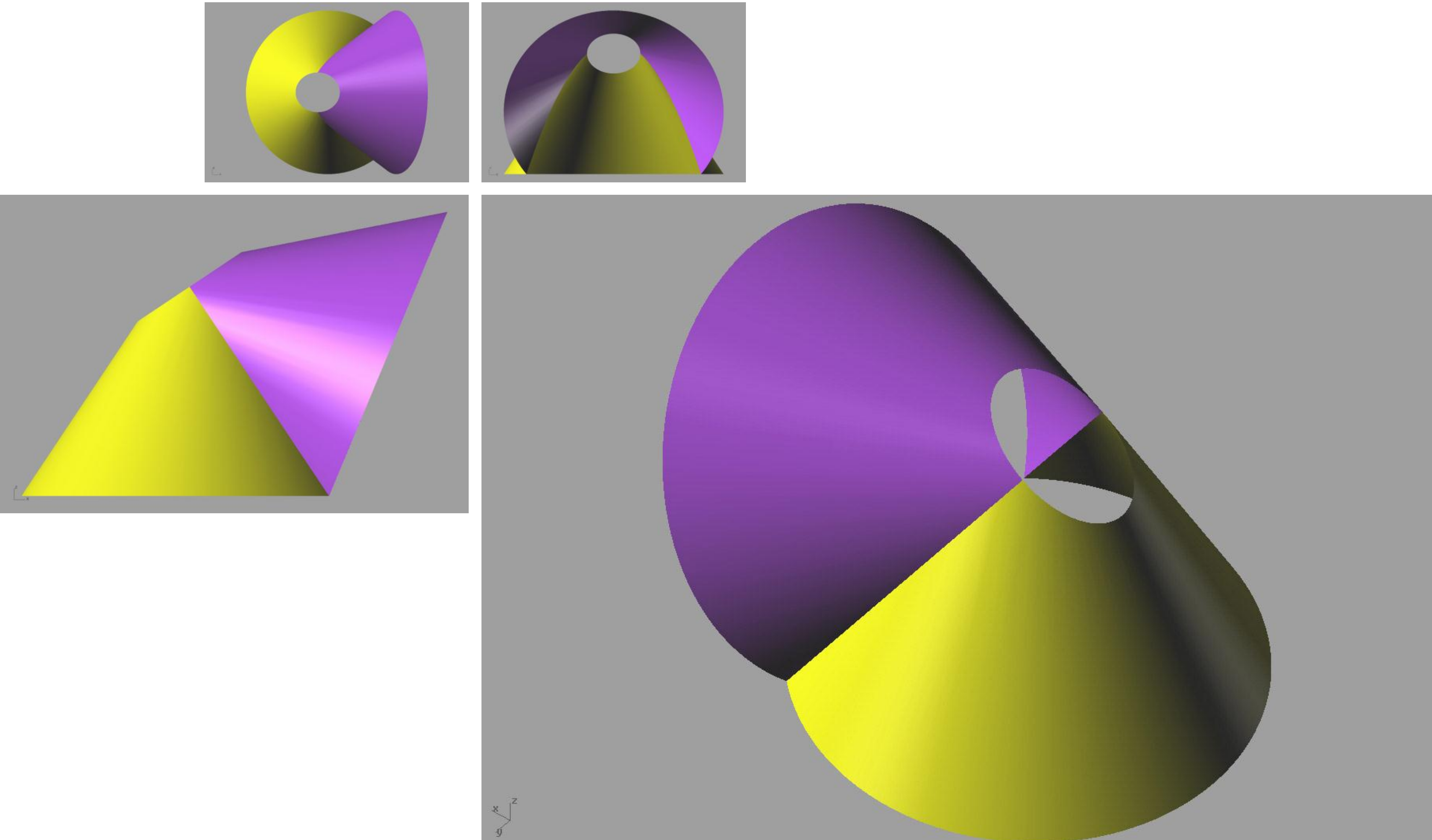




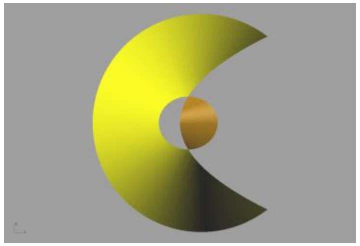


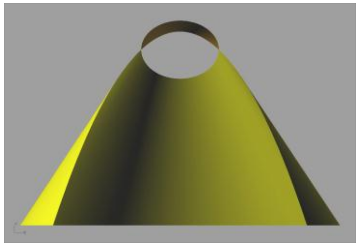


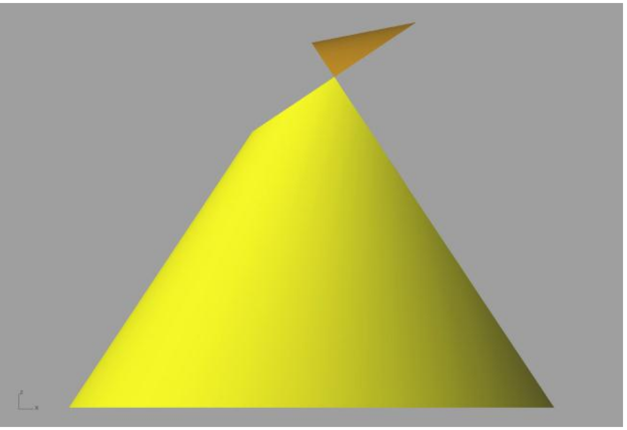
Due coni per una parabola - variazioni - 7.

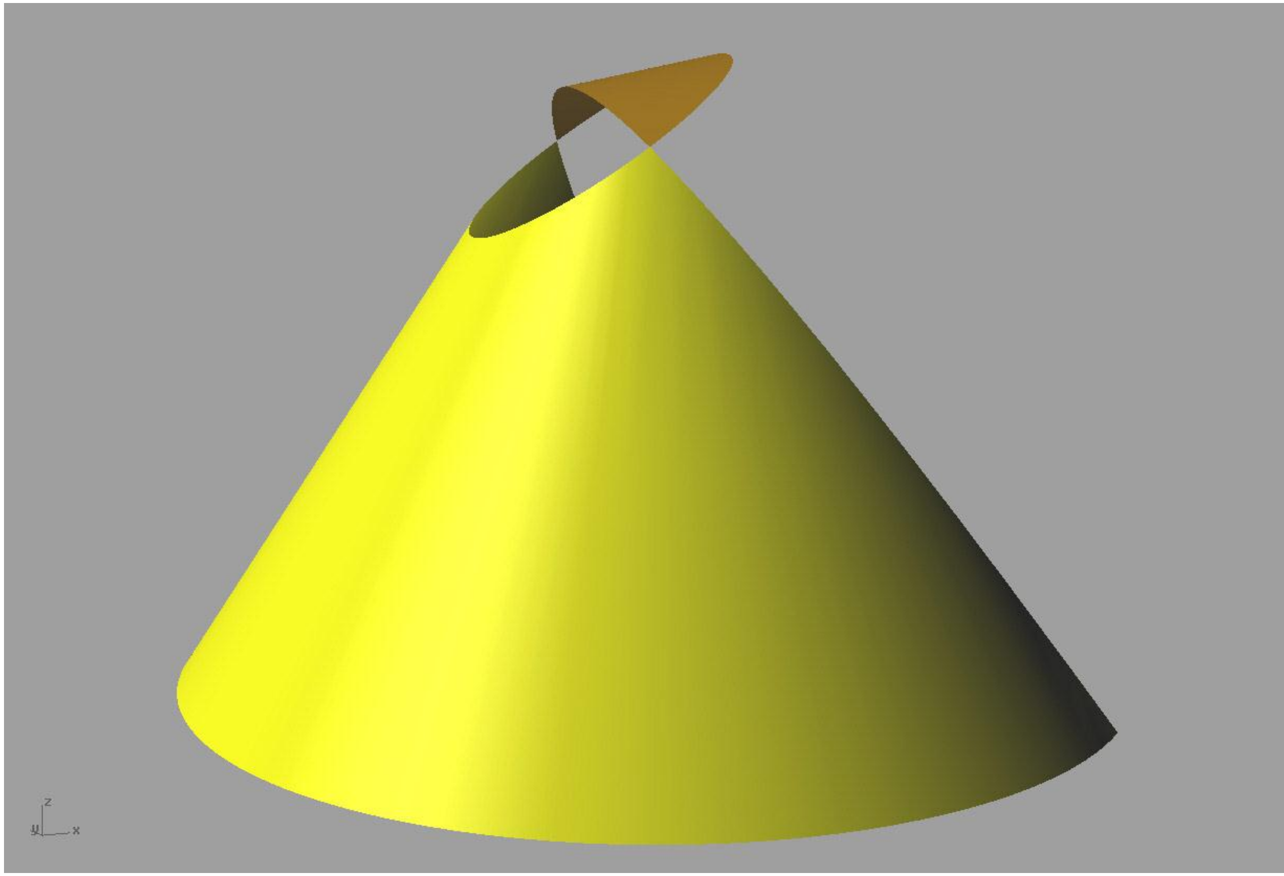


Due coni per una parabola - variazioni - 8.

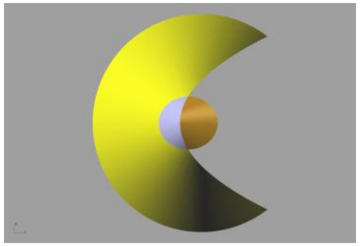


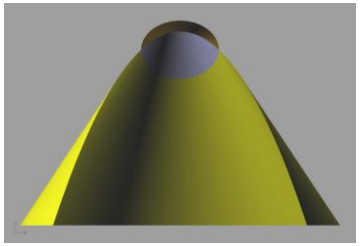


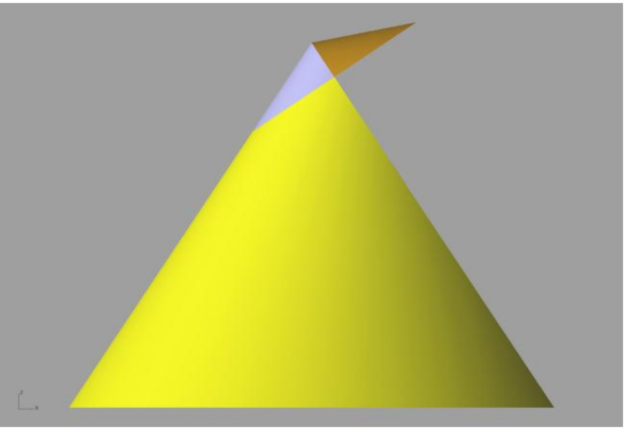


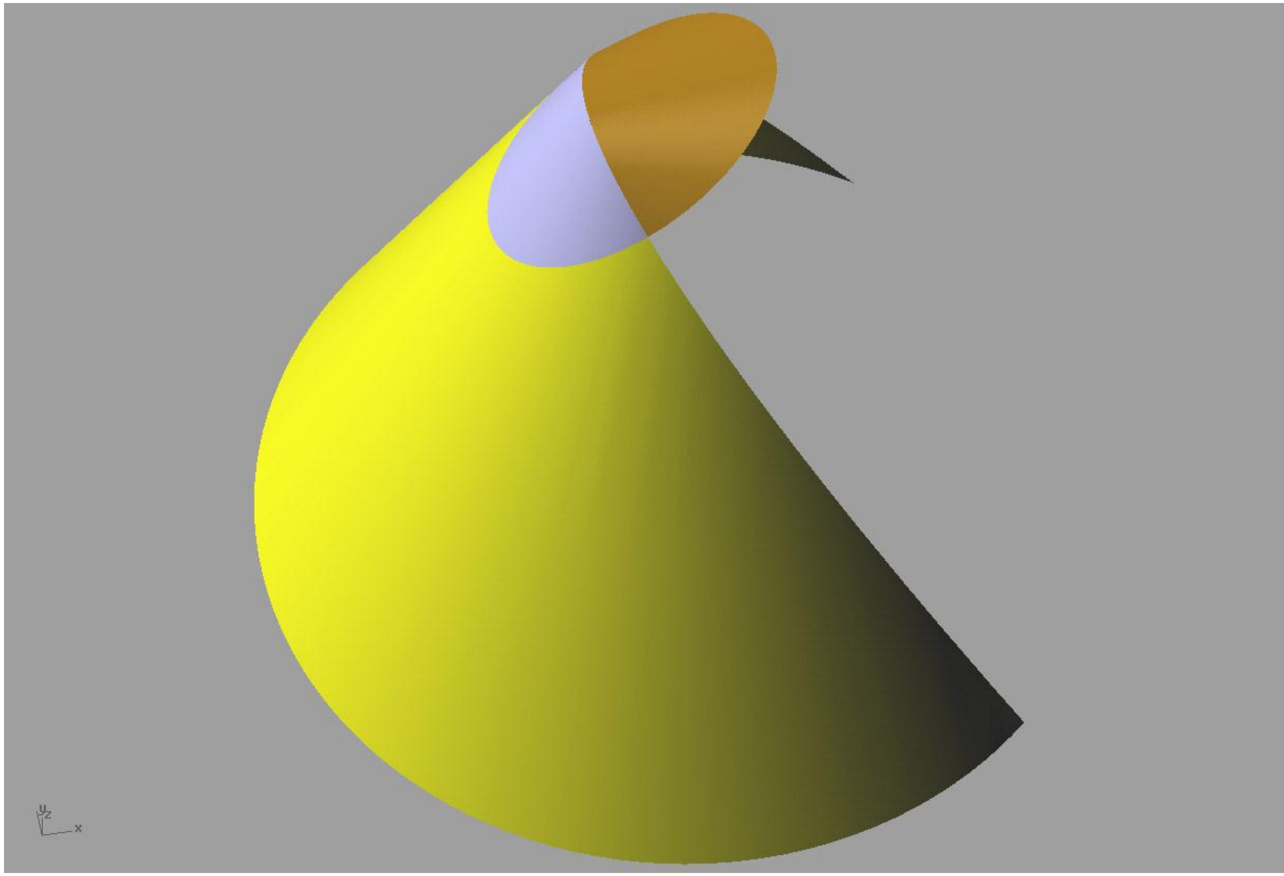


Due coni per una parabola - variazioni - 9.

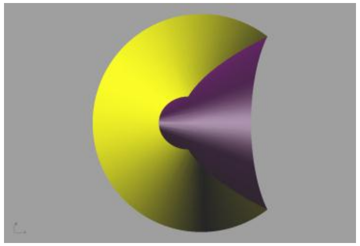


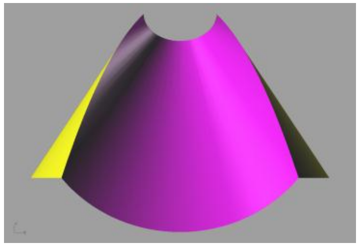


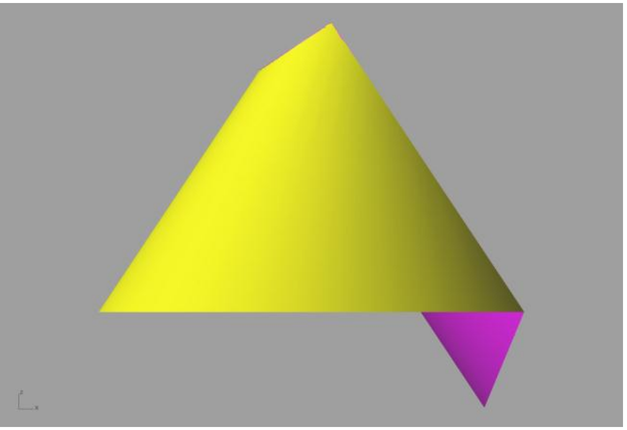


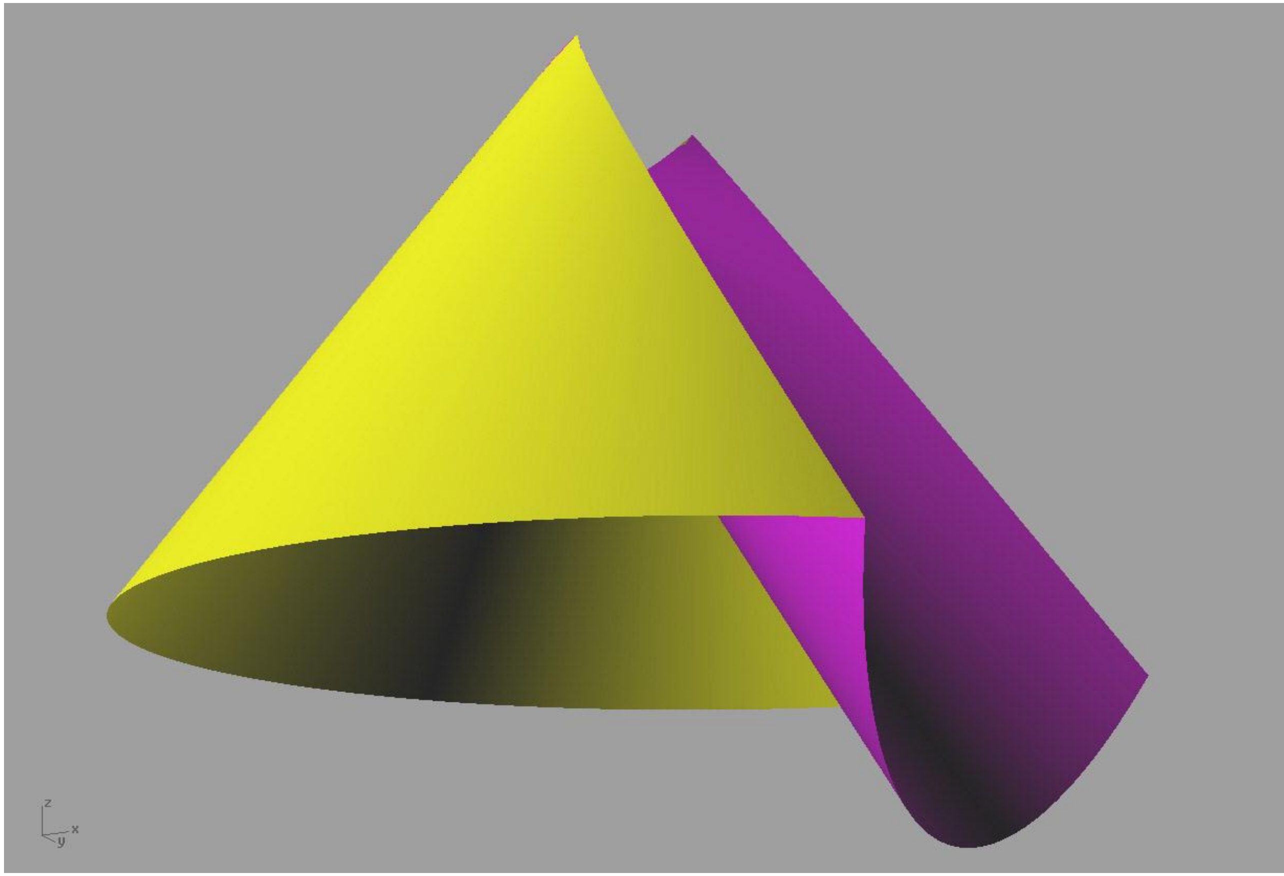


Due coni per una parabola - variazioni - 10.

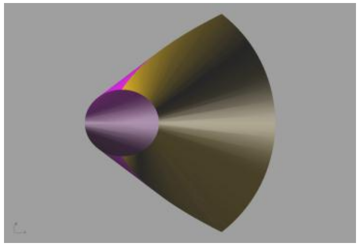


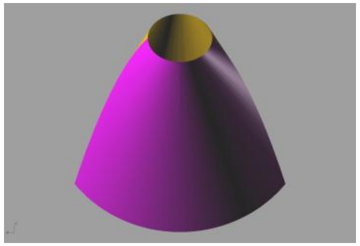


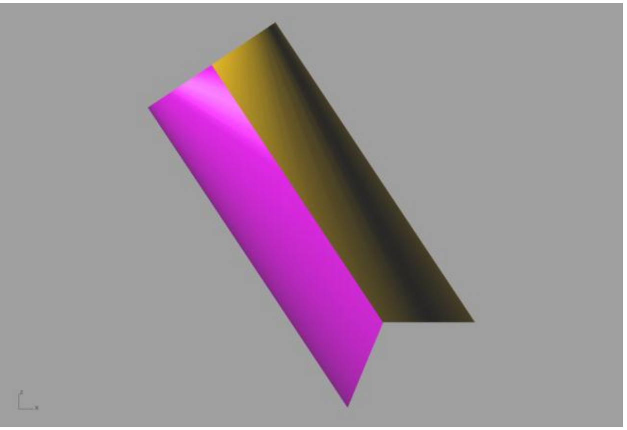


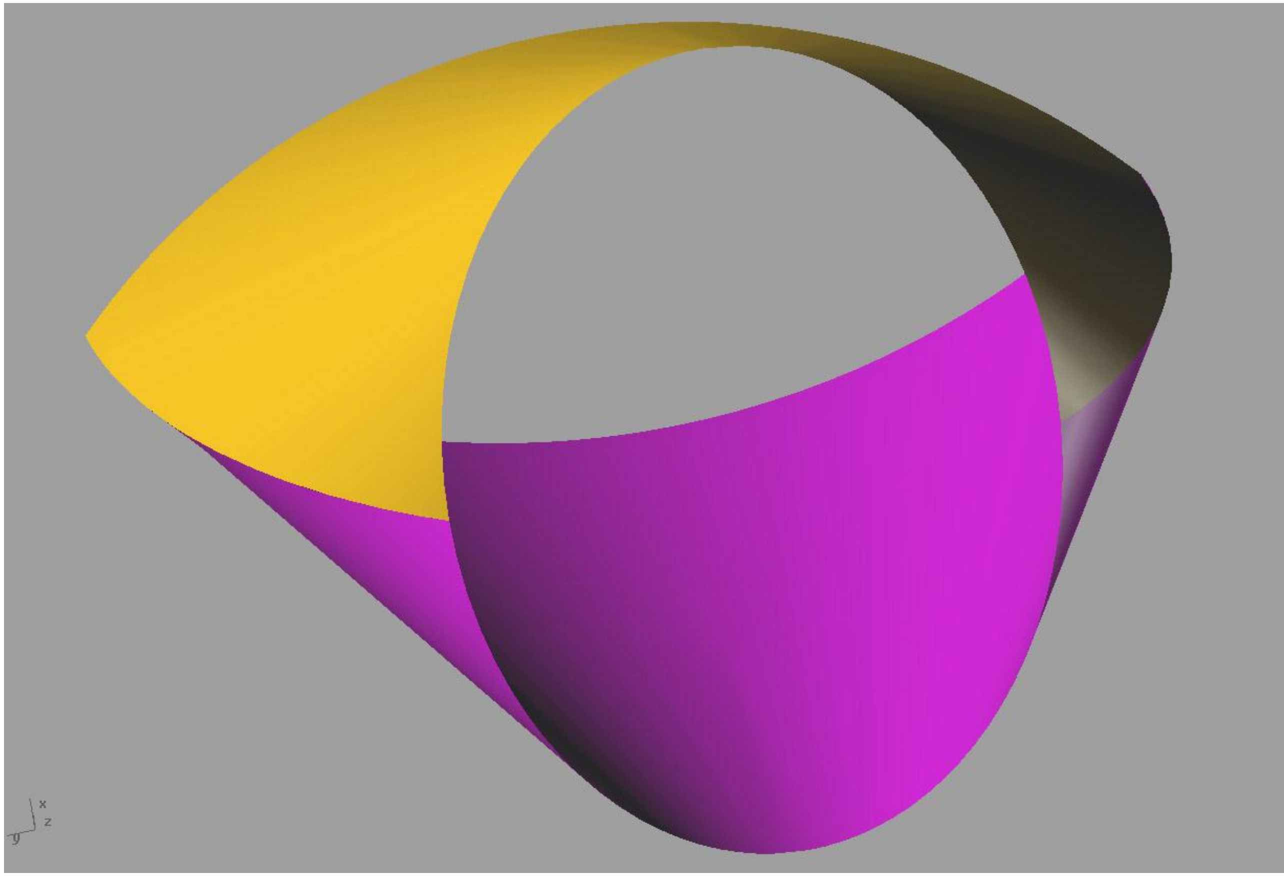


Due coni per una parabola - variazioni - 11.

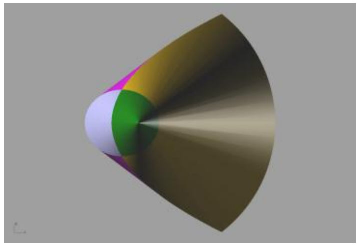


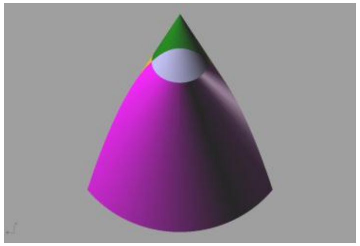


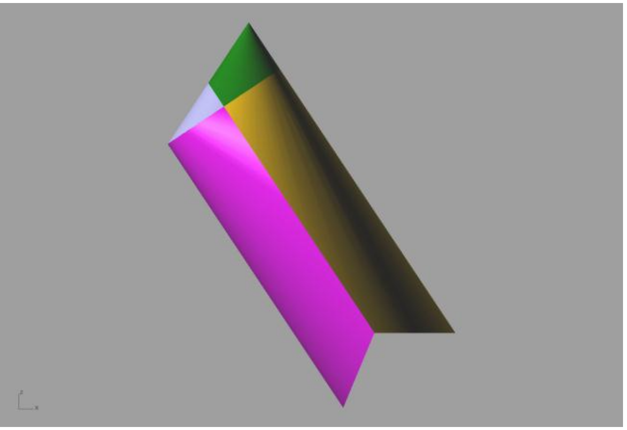


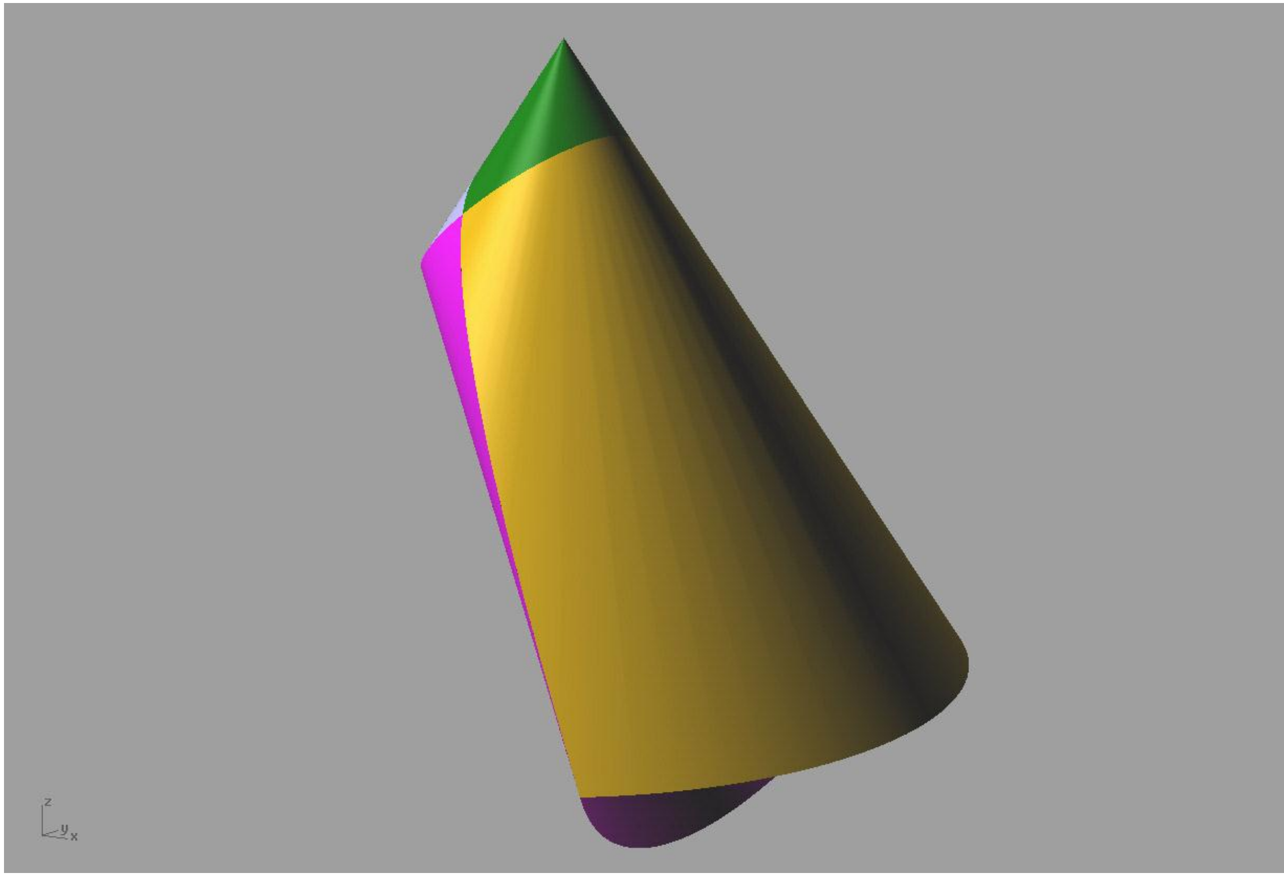


Due coni per una parabola - variazioni - 12.

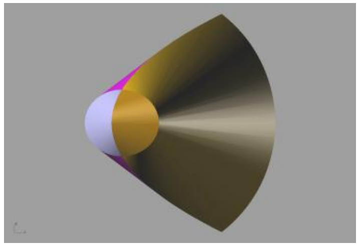


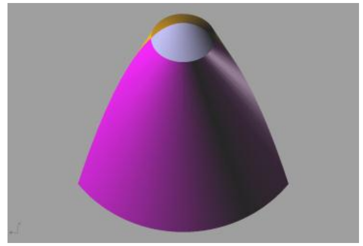


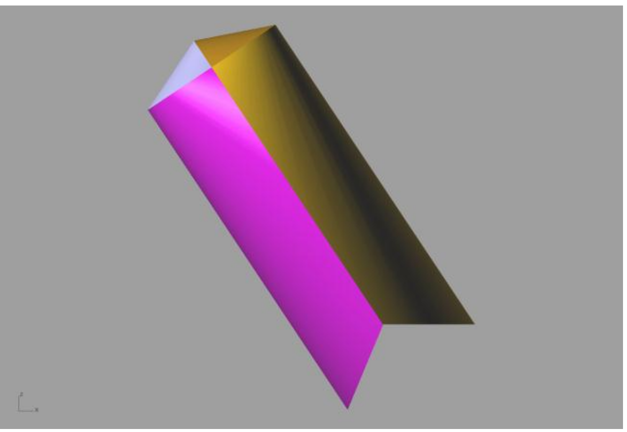


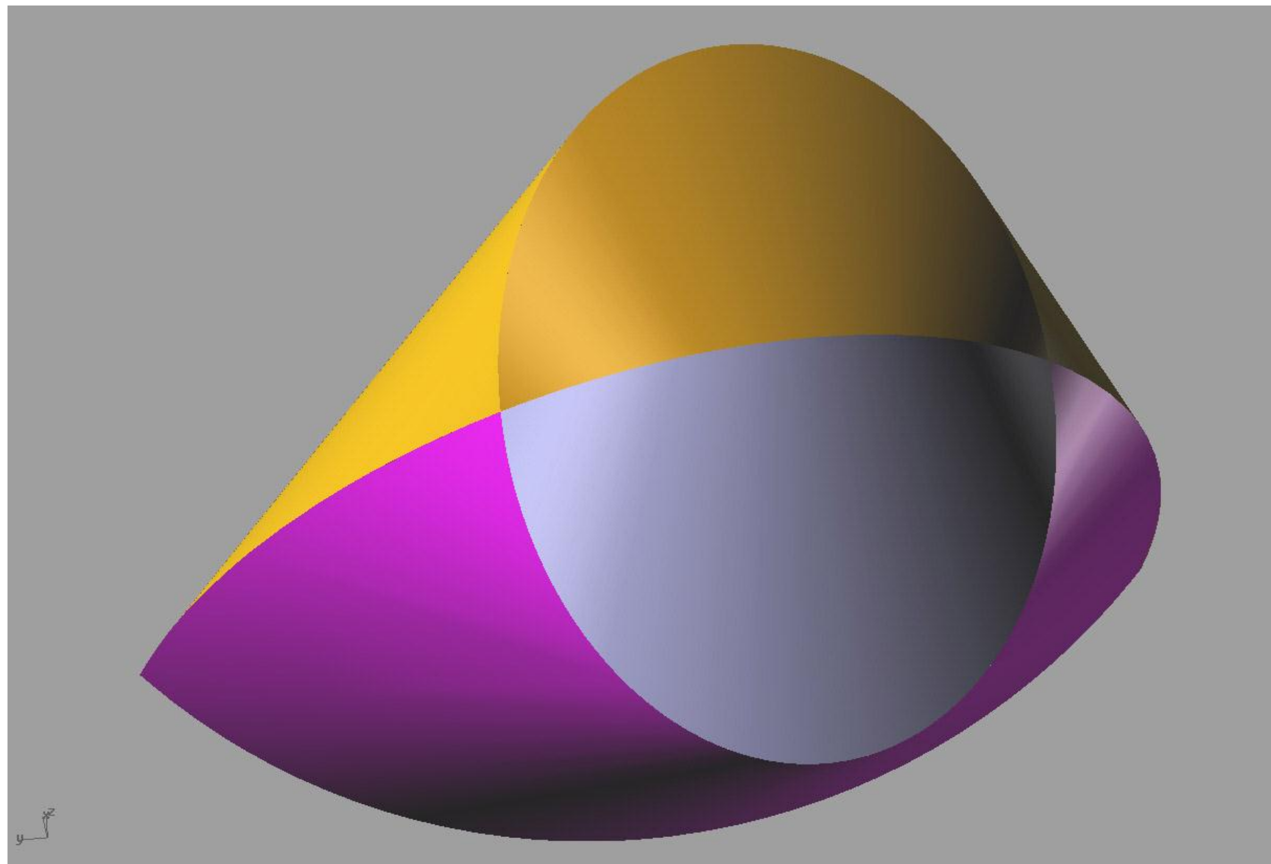


Due coni per una parabola - variazioni - 13.

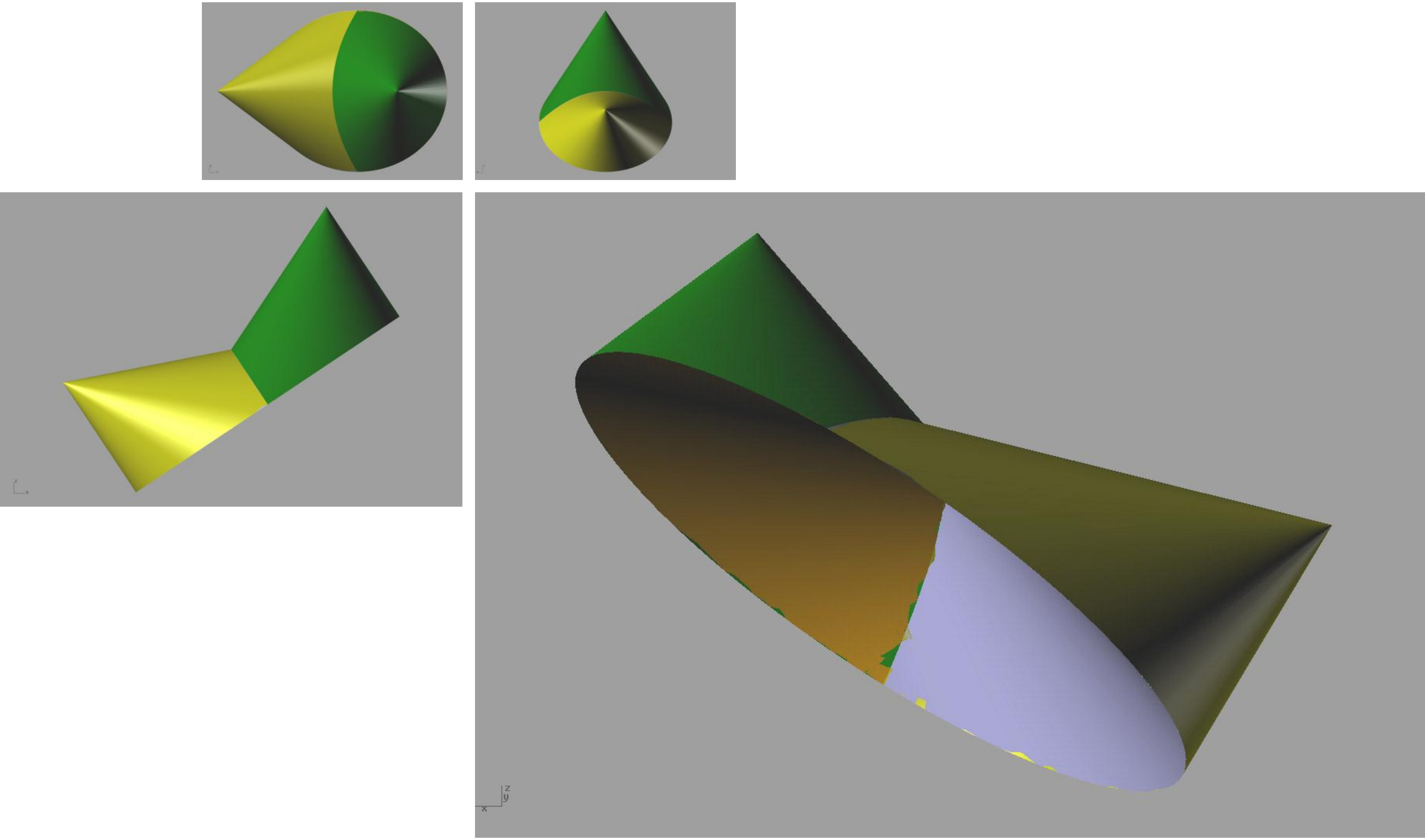




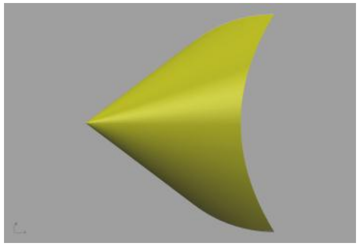


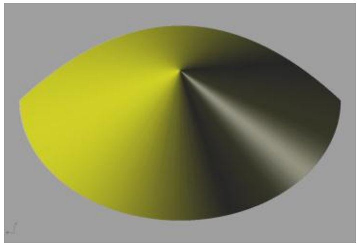


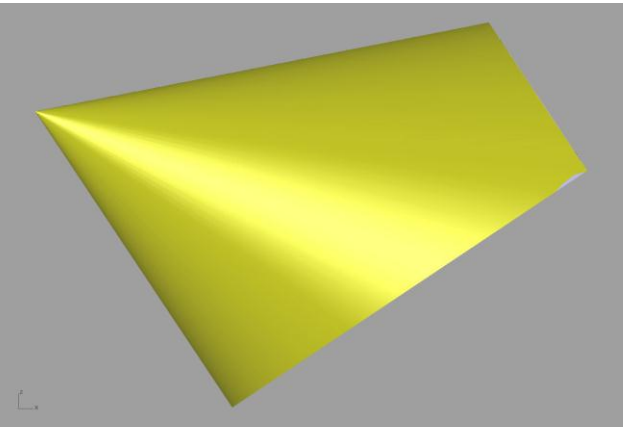
Due coni per una parabola - variazioni - 14.

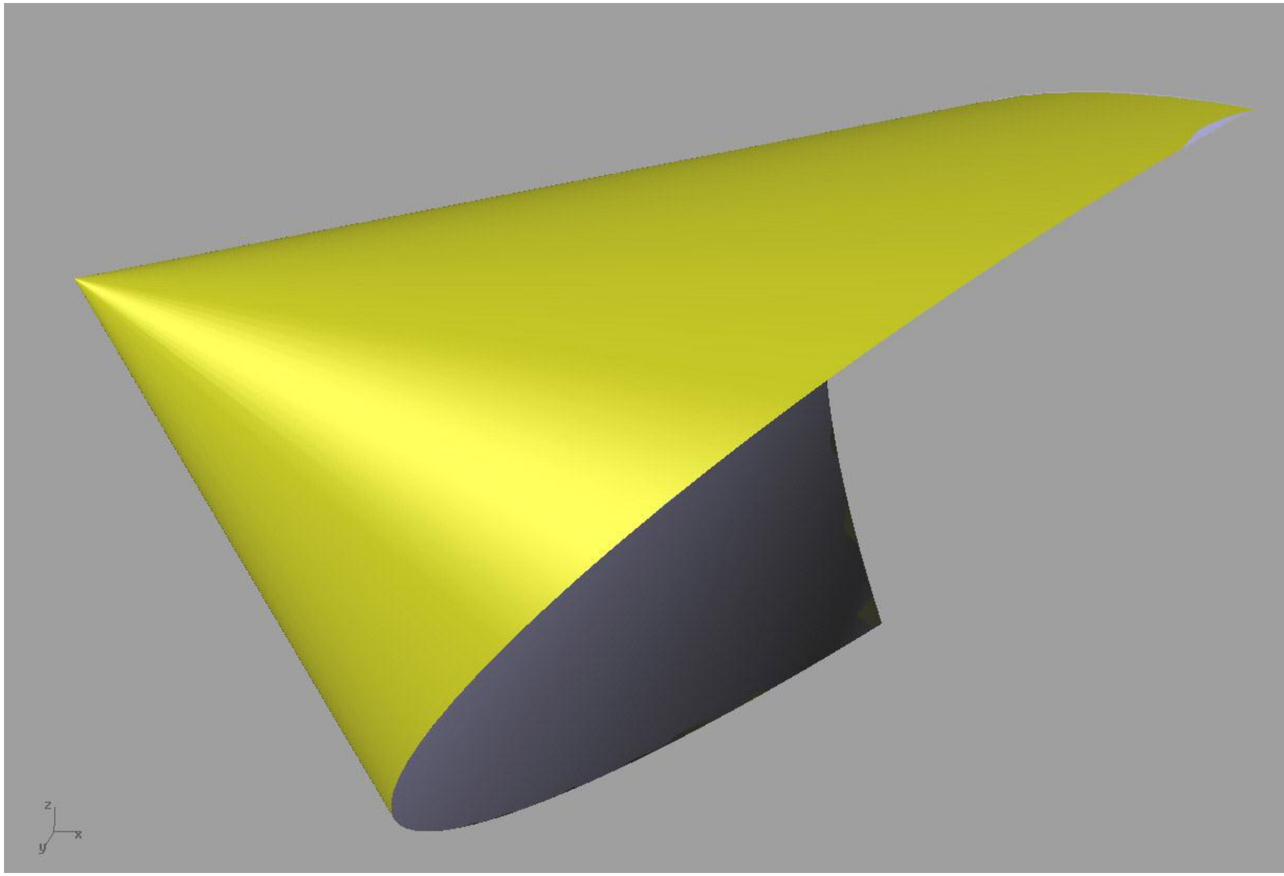


Due coni per una parabola - variazioni - 15.

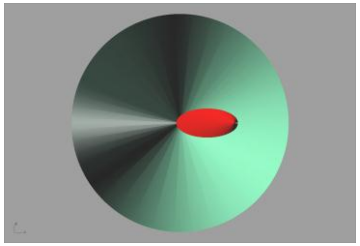


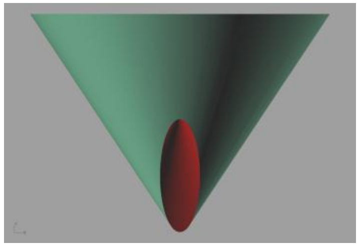


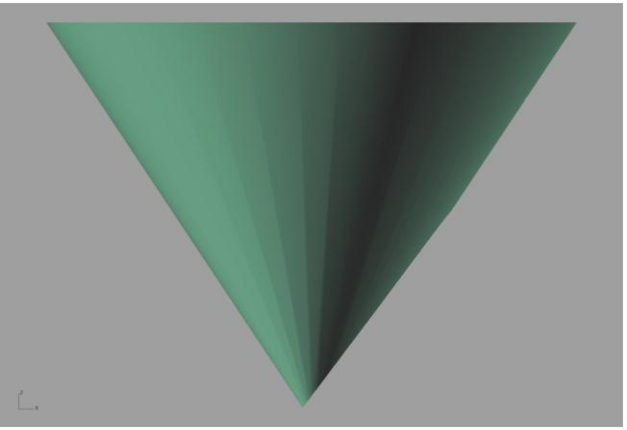


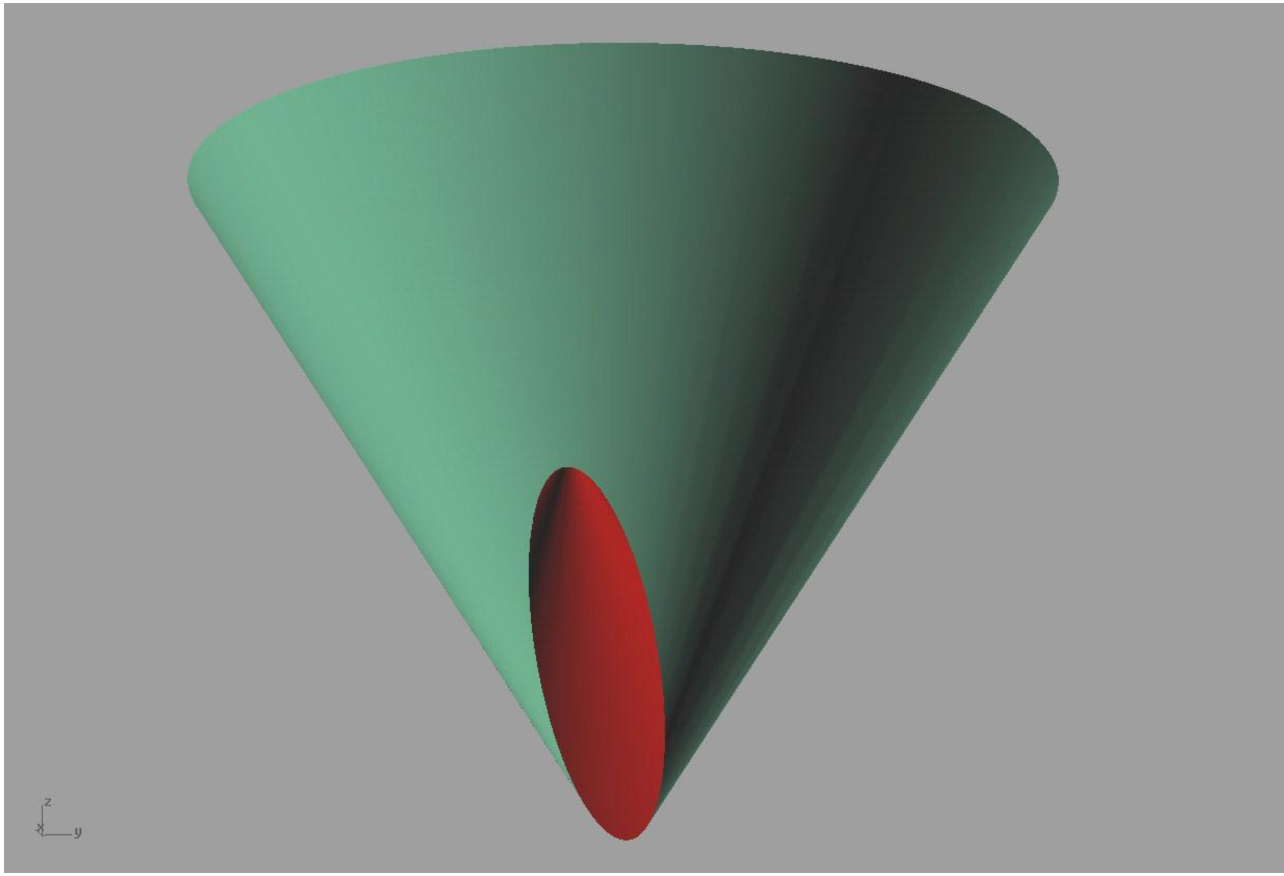


Due coni per un’ellisse - variazioni - 1.

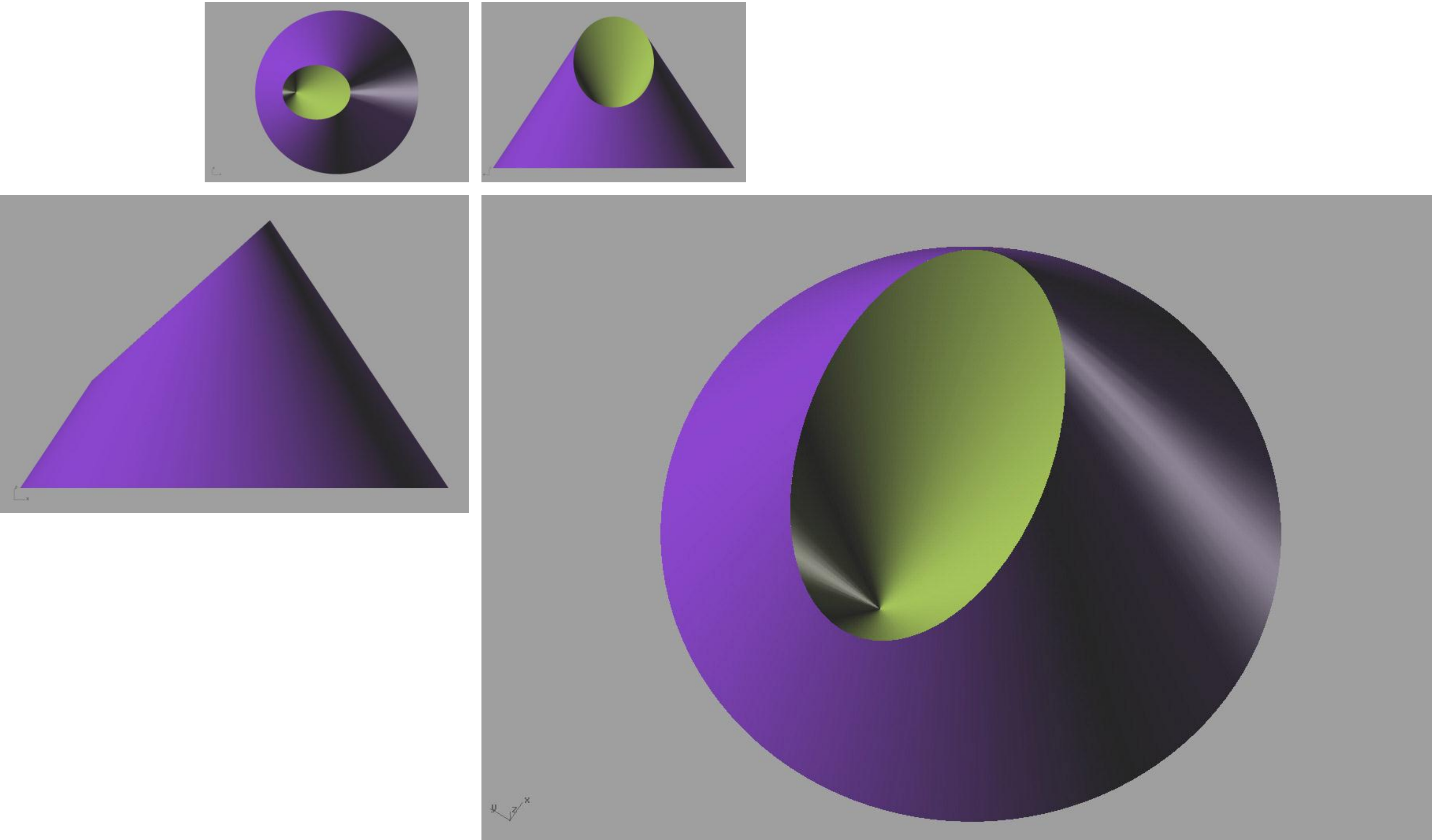




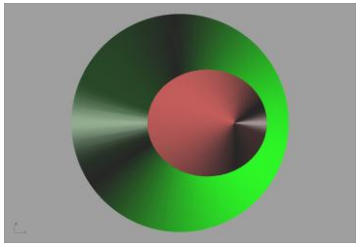


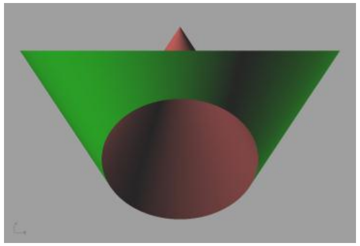


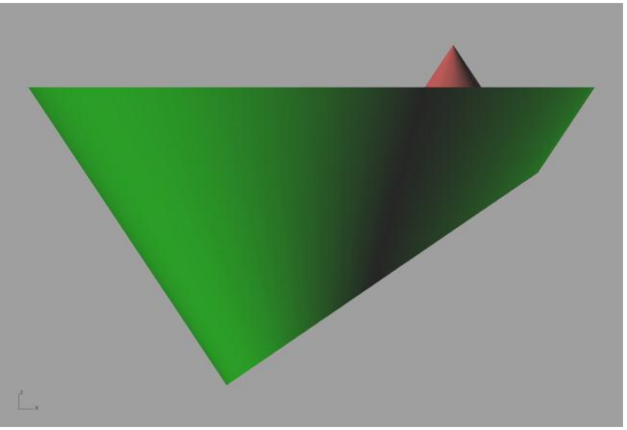
Due coni per un’ellisse - variazioni - 2.

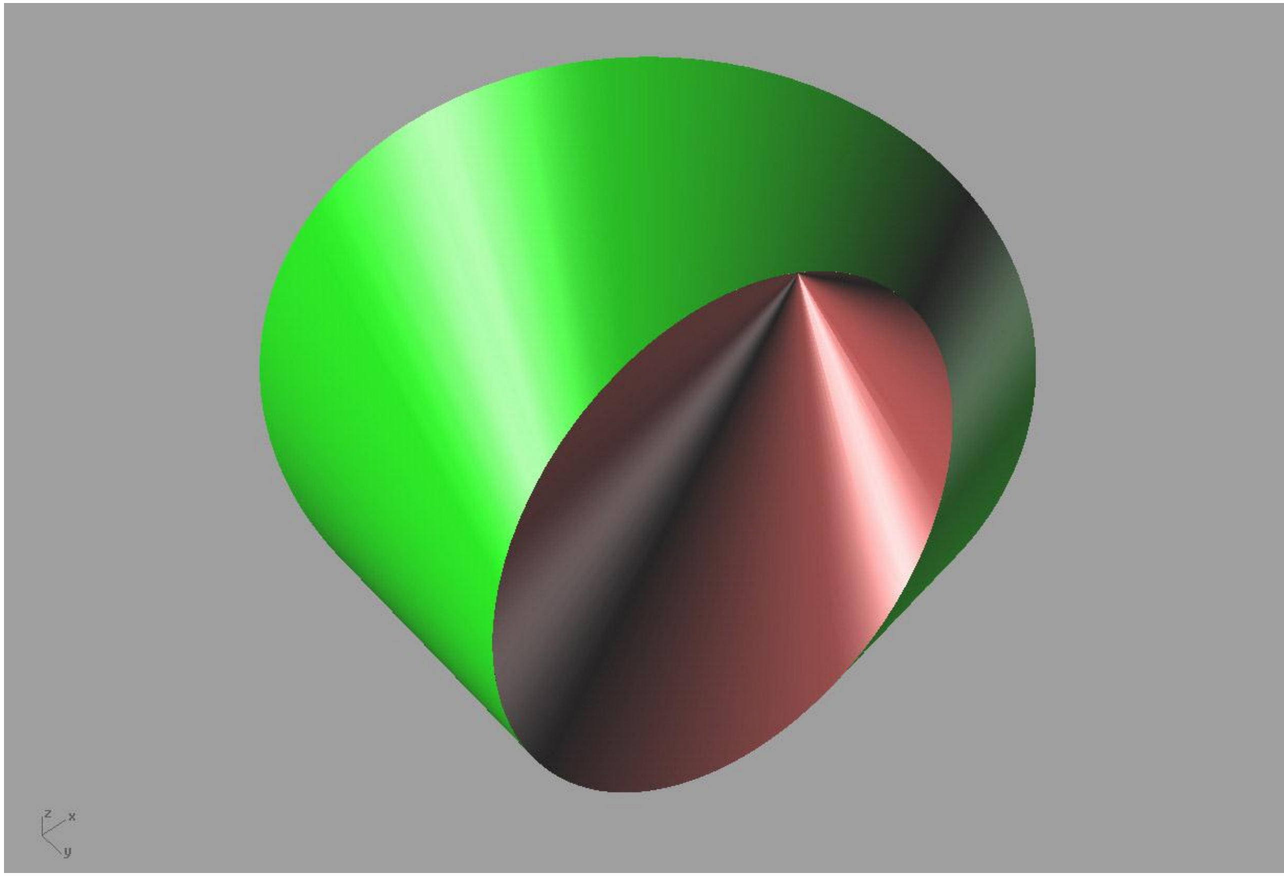


Due coni per un’ellisse - variazioni - 3.

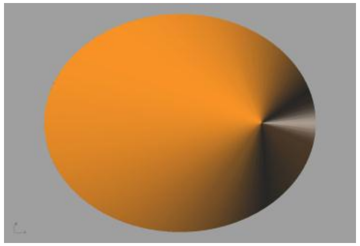


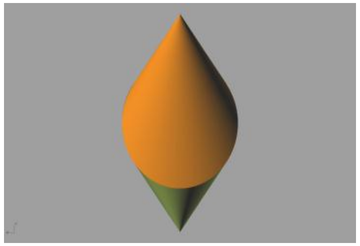


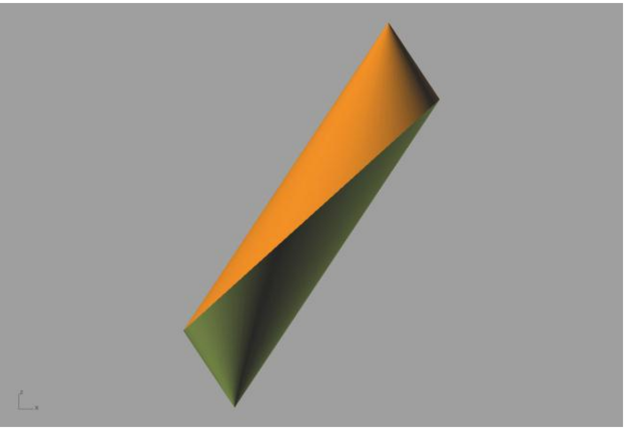


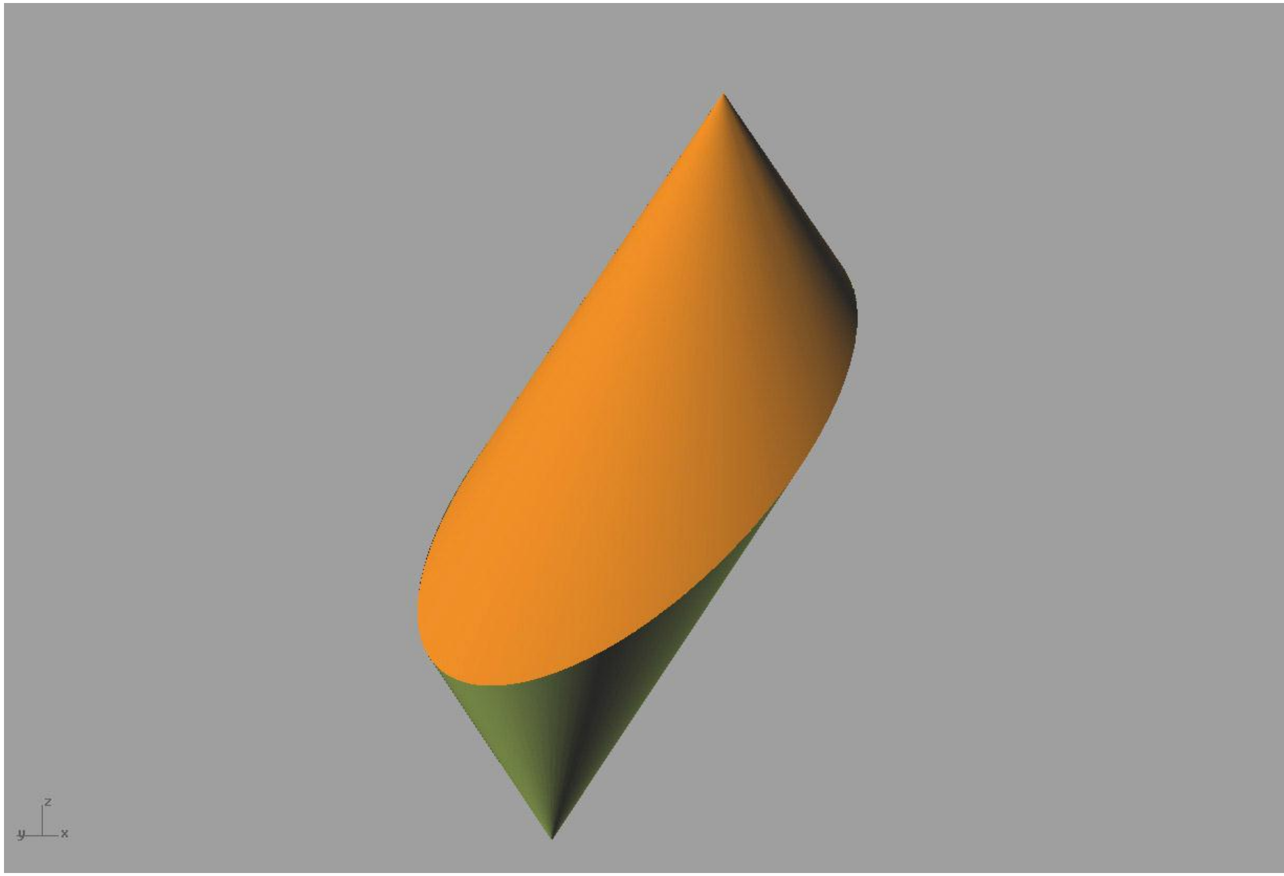


Due coni per un’ellisse - variazioni - 4.

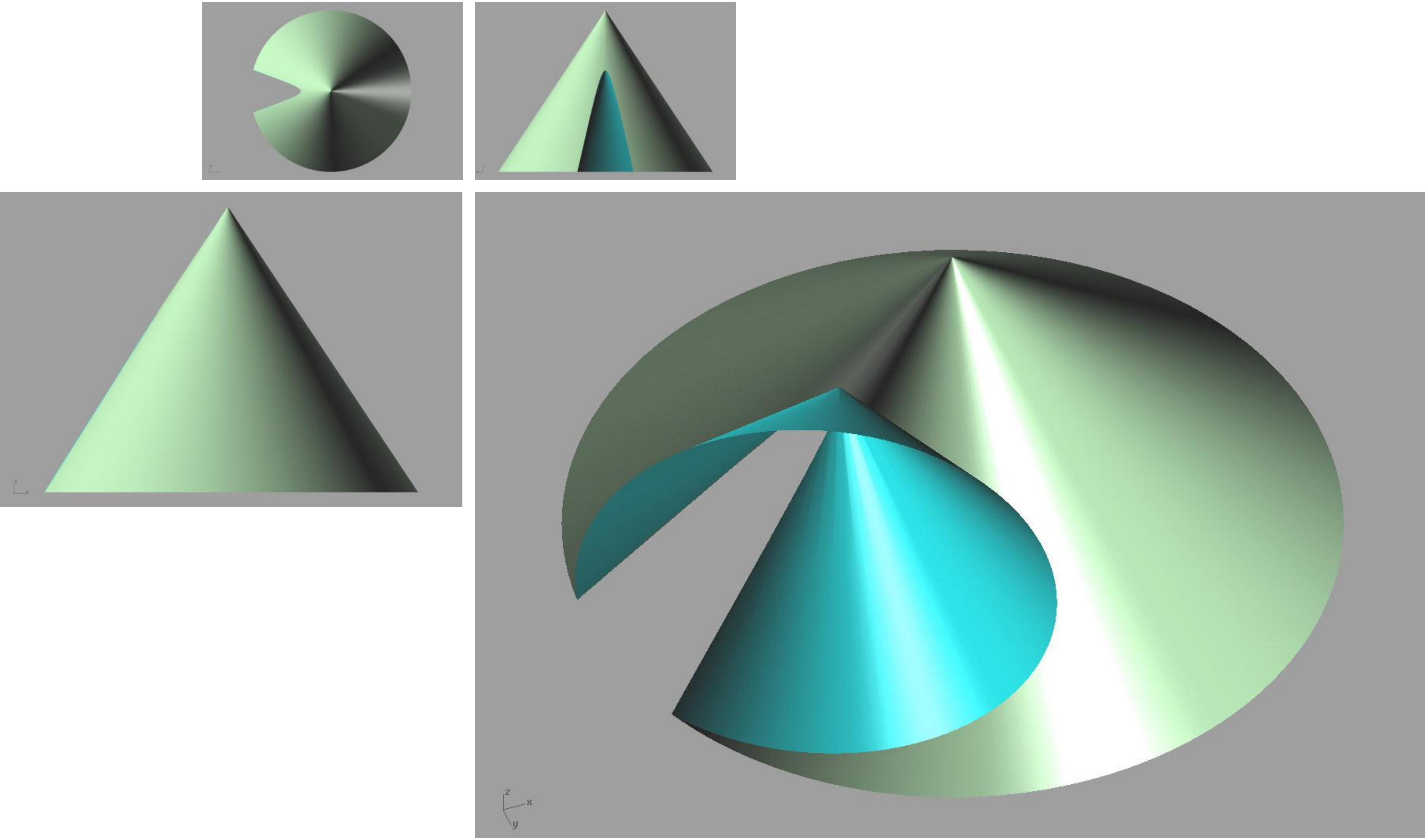




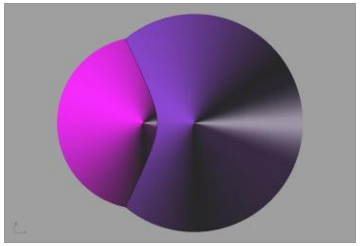
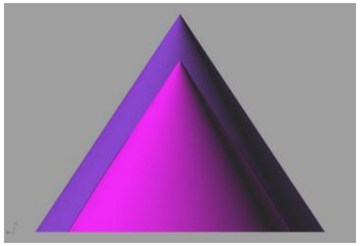
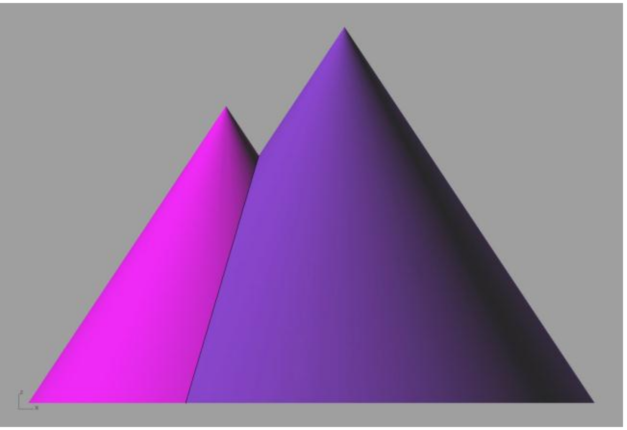
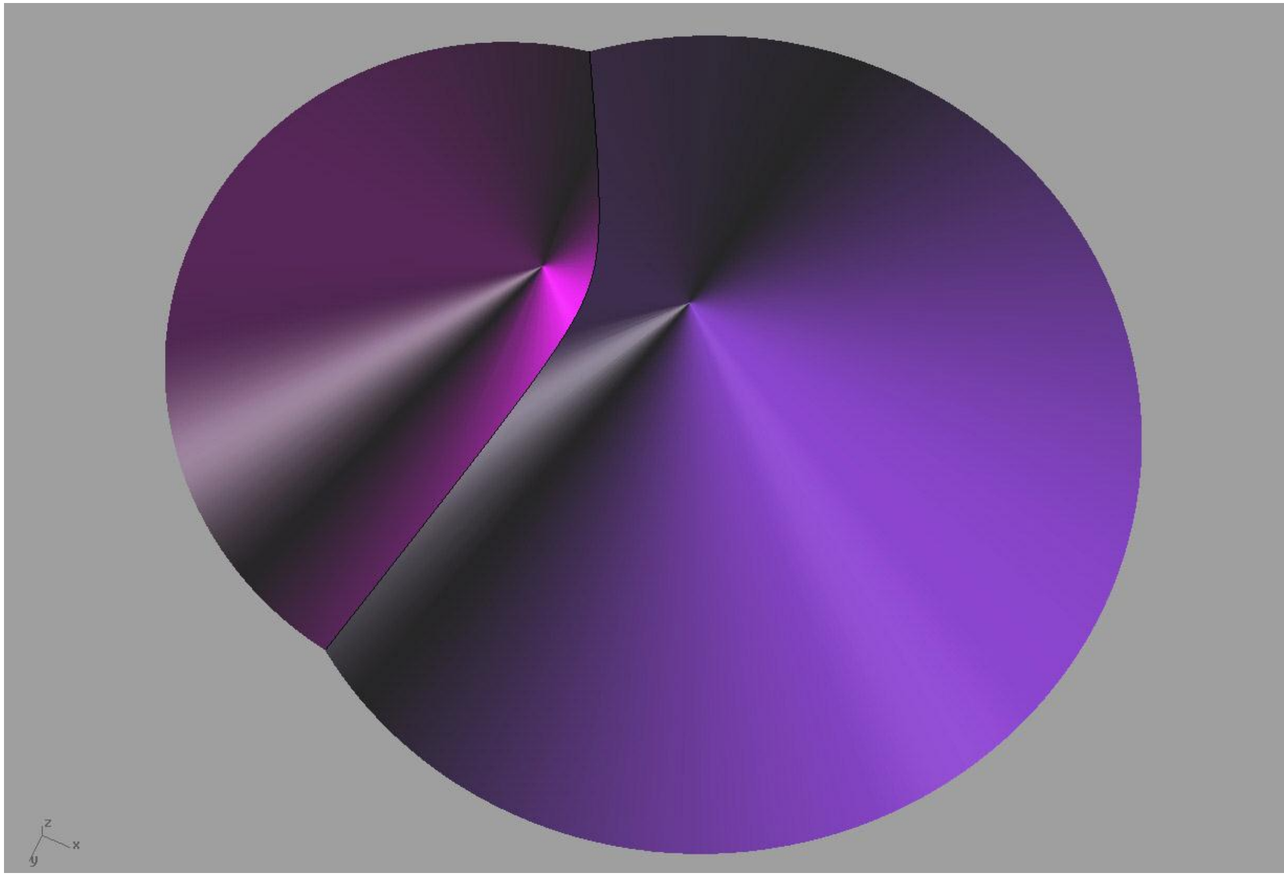




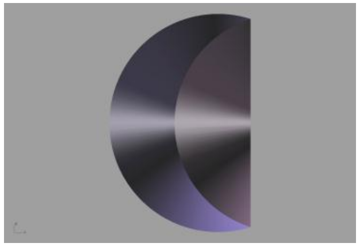
Due coni per un’iperbole - variazioni - 1.

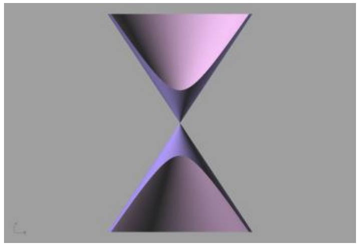


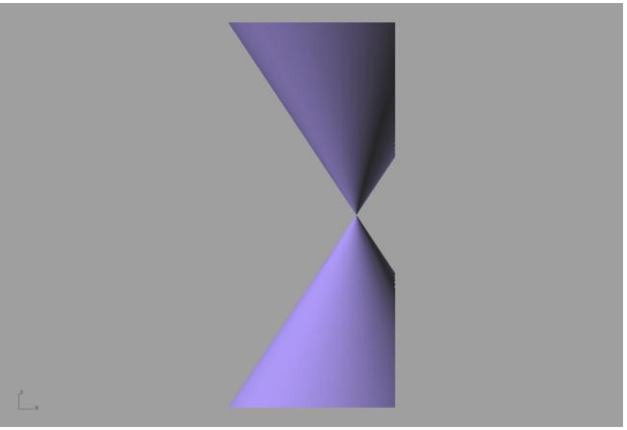
Due coni per un'iperbole - variazioni - 2.

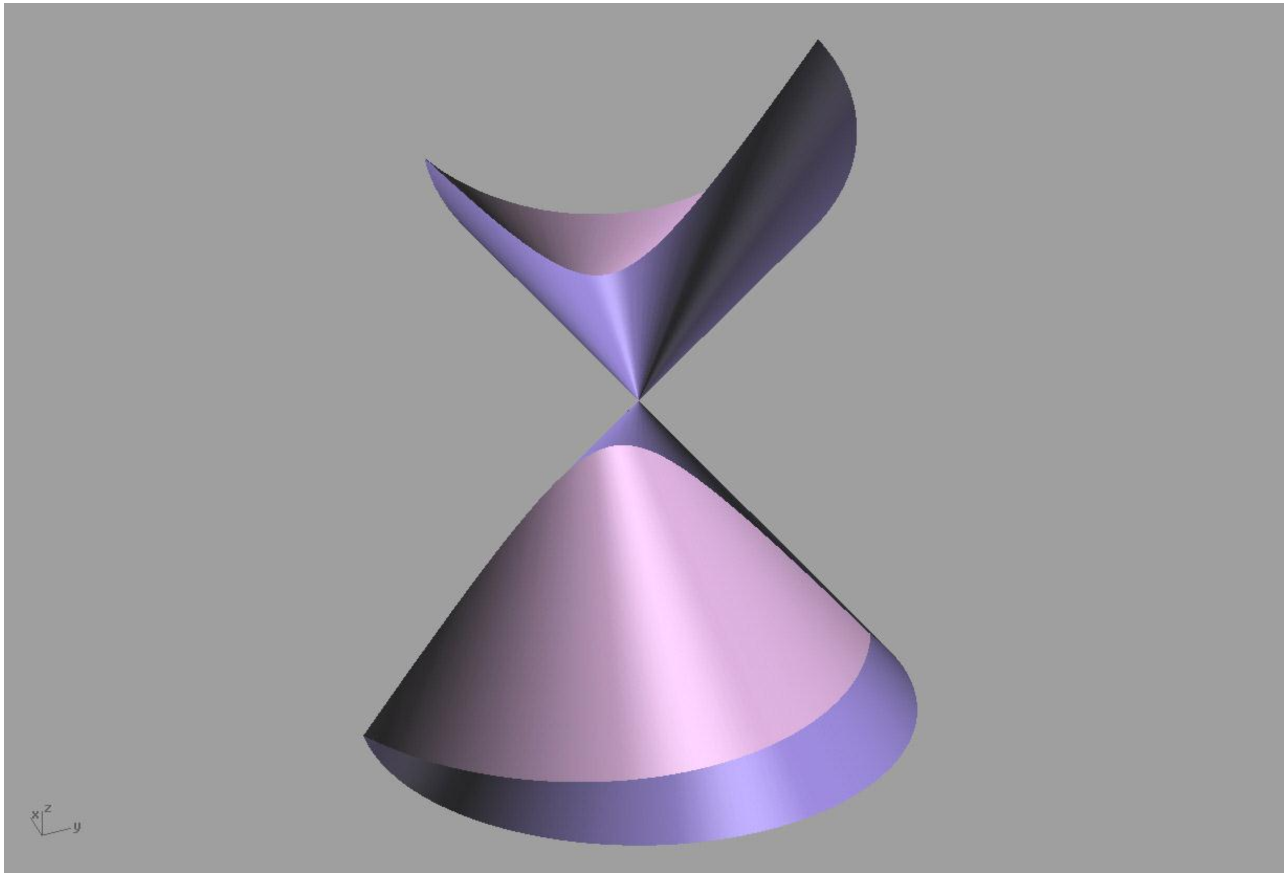





Due coni per un'iperbole - variazioni - 3.









Due coni per un'iperbole - variazioni - 4.